کاربرد روش کمترین مربعات برای تحلیل و طراحی مسائل مهندسی الکترومغناطیس

همایون عریضی

استاد مهندس برق، دانشگاه علم و صنعت ایران

*تهران، نارمک، کدپستی ١٦٨٤٤

h_ oraizi @ IUST. ac. ir

چکیده– در این مقاله، کاربرد روش عددی کمترین مربعات برای حل مسائل مختلف مهندسی الکترومغناطیس بطور اجمالی مرور و بررسی می‌شود. در اینجا، روش کمترین مربعات برای تحلیل و طراحی مسائل مختلف به کار می‌رود، مانند: حل معادلات، برازش منحنی به داده‌های اندازه‌گیری، ضرایب سری فوریه، معادلات با کارگردانهای خطی، معادلات انتگرالی و دیفرانسیلی، مسائل الکتریسیته ساکن و مغناطیس ساکن، مسائل مقادیر مرزی (توسط روش باقیمانده مرزی کمترین مربعات)، طراحی مبدلهای امپدانس و خطوط پله‌ای و باریک شونده برای تطبیق امپدانس، طراحی بهینه پیوندنده‌های جهتی چند سوراخه، پیوندنده خط پیونیده، پیوندنده خط شاخه‌ای، پیوندنده حلقوی، تحلیل آنتن سیمی، سنتز پرتو آنتن، سنتز آرایه و پراکندگی. در این مطالعه آشکار می‌شود که روش عددی کمترین مربعات را می‌توان برای تدوین الگوریتمهای موثری برای تحلیل و طراحی مسائل مختلف در موضوعات تشعشع، پراکندگی، آنتنها، میکروویو، ریاضیات مهندسی و غیره به کار برد. بعضی مقالات و کتب منتشر شده در زمینه کاربردهای روش کمترین مربعات برای تحلیل و طراحی مسائل مهندسی الکترومغناطیس گروه‌بندی شده و در بخش مراجع ذکر شده است.

کلید واژگان: روش کمترین مربعات، روش باقیمانده مرزی کمترین مربعات، روشهای عددی در الکترومغناطیس، تابع خطا، بهینه‌سازی، کمینه‌سازی، حل معادلات، معادلات انتگرالی و دیفرانسیلی، معادلات خطی، قطعات میکروویو، آنتن، آرایه، تشعشع‌کننده، پراکندگی.

١– مقدمه

کارل فردریک گاوس ریاضیدان برجسته آلمانی در دوره تحصیلات دانشگاهی‌اش در پایان قرن هیجدهم نظریه کمترین مربعات[1] را ابداع کرد[١]. از آن پس این نظریه توانائی‌اش را برای تحلیل و طراحی بسیاری از مسائل عملی و مهندسی نشان داده است. نظریه کمترین مربعات بر مبنای ساخت یک

1. Method of least squares (MLS)

تابع خطا[1] و تعیین نقطه یا نقاط حداقل‌اش[2] توسط یک روش بهینه‌سازی[3] (مانند روش پرشیب‌ترین فرود[4]، گرادیان مزدوج[5]، الگوریتم وراثتی[6]، انیلینگ برانگیخته[7] و غیره) قرار دارد [۲و۳]. تابع خطا معمولاً بصورت مجذور تفاضل بین تابع تقریبی و تابع مطلوب یک کمیت مورد نظر مسئله ساخته می‌شود. تابع خطا می‌تواند بصورت بزرگتر یا کوچکتر از توان ۲ نیز ساخته شود. ولی تابع حاصل پیچیدگی بیشتری نیز خواهد داشت. بنابراین، تدوین یک روش عددی کمترین مربعات برای حل یک مسئله علمی و مهندسی شامل تحلیل فیزیکی و ریاضی مسئله، ساخت یک تابع خطا و تعیین نقطه یا نقاط حداقل‌اش توسط یک روش بهینه‌سازی تحت قید[8] می‌باشد.

اگر تابع خطا یک تابع درجه دوم متغیرهای مسئله باشد، تابع خطا تنها یک نقطه حداقل دارد و بهینه‌سازی و تعیین نقطه حداقل‌اش منجر به حل یک معادله خطی ماتریسی خواهد شد. بنابراین، برای تعیین نقطه حداقل چنین تابع خطائی می‌توان از یک روش بهینه‌سازی و یا از یک روش حل معادلات خطی[۴-۷] استفاده کرد. بسیاری از روشهای عددی مانند روش ممان به یک معادله خطی ماتریسی می‌رسد که باید توسط یکی از روشهای معمول یا معکوس کردن یک ماتریس حل شود. روش گرادیان مزدوج[۲۰] را نیز می‌توان برای حل معادلات خطی به کار برد، که در مقاله دیگری شرح داده خواهد شد.

در این مقاله بعضی از کاربردهای روش کمترین مربعات را برای تدوین الگوریتمهای عددی برای حل بعضی از مسائل ریاضی و مهندسی الکترومغناطیس مرور می‌کنیم. البته کاربردهای روش کمترین مربعات بسیار وسیعتر از آن است که بتواند در این مقاله مختصر ارائه شود. ابتدا، روش کمترین مربعات را برای برازش یک منحنی به داده‌های اندازه‌گیری، تعیین ضرایب سری فوریه یک تابع و حل معادلات خطی، غیر خطی و چند جمله‌ای شرح می‌دهیم. سپس، حل معادلات دیفرانسیلی و انتگرالی و حل معادله شرایط مرزی توسط روش کمترین مربعات ارائه می‌شود. حالت کلیتر حل معادلات شامل کارگردانهای انتگرالی و دیفرانسیلی نیز بیان می‌شود. آنگاه حل مسئله مقادیر مرزی در میکروویو مانند پیوندگاه موجبرهای استوانه‌ای توسط روش باقیمانده مرزی کمترین مربعات[9] شرح داده می‌شود. طراحی مبدلهای امپدانس برای خطوط انتقال مانند موجبرهای توخالی و میکرواستریپ توسط روش کمترین مربعات بیان می‌شود. طراحی پیوندده‌های جهتی چندسوراخه، پیوندده خط پیونیده، پیوندده خط شاخه‌ای و پیوندده حلقوی توسط این روش نیز بیان می‌شود. بالاخره، سنتز پرتو آنتن و آرایه آنتنها ارائه می‌شود. یادآوری می‌شود که کاربردهای روش کمترین مربعات بسیار گسترده‌تر از چند مثالی است که در این مقاله ذکر می‌شود. بعضی از مقالات منتشر شده در زمینه کاربرد روش کمترین مربعات برای حل مسائل میکروویو و آنتن در بخش مراجع گروه بندی شده است. بنابراین، روش کمترین مربعات به عنوان یکی از روشهای عددی تحلیل و طراحی مسائل الکترومغناطیس تلقی می‌شود که توانائی تدوین الگوریتمهای مناسب را بر مبنای نظریه الکترومغناطیس دارد [۸-۲۵].

۲- حل معادلات توسط روش کمترین مربعات [۲۶-۲۹]

1. Error function
2. Minimum point
3. Optimization
4. Steepest descent
5. Conjugate gradient (CG)
6. Genetic algorithm (GA)
7. Stimulated annealing (SA) (سخت کردن، گرم و سرد کردن تدریجی)
8. Constraint
9. Least Squares Boundary Residual Method (LSBRM)

فرض کنید می‌خواهیم صفرهای معادله

$$F\left(z, z^*\right)=0 \tag{۱}$$

را که تابع متغیر مختلط z و مزدوجاش z^* بوده و شامل پارامترها و ثابتهای مختلط نیز هست، تعیین کنیم. تابع خطائی را بصورت

$$\varepsilon = F\left(z, z^*\right)F^*\left(z, z^*\right)=\left|F\left(z, z^*\right)\right|^2 \tag{۲}$$

می‌سازیم که تابع حقیقی و غیر منفی است. تابع خطای $\mathcal{E}$ تابع متغیرهای حقیقی x و y است. صفرهای تابع F بصورت متغیر مختلط z به دست می‌آید، در صورتی که صفرهای $\mathcal{E}$ بصورت متغیرهای حقیقی x و y تعیین می‌شود. بطور کلی، تابع F دارای صفرهای (متغیر مختلط) متعددی است که در هر یک از آنها تابع خطا دارای یک صفر محلی است. اگر تابع F دارای صفر نباشد، حداقل‌های تابع خطا، نقاط حداقل اندازه تابع F را به دست می‌دهد. برای تدوین روش عددی کمترین مربعات و کاربرد یک الگوریتم حداقل‌سازی، لازم است که مشتقهای جزئی $\mathcal{E}$ را نسبت به متغیرهای حقیقی x و y در z=x+jy محاسبه کنیم. بنابراین، از قانون زنجیری مشتق‌گیری داریم [۸]

$$\frac{\partial \varepsilon}{\partial x}=\frac{\partial \varepsilon}{\partial z}+\frac{\partial \varepsilon}{\partial z^*} \tag{۳}$$

$$\frac{\partial \varepsilon}{\partial y}=j\left(\frac{\partial \varepsilon}{\partial z}-\frac{\partial \varepsilon}{\partial z^*}\right) \tag{٤}$$

بنابراین، اگر $\frac{\partial \varepsilon}{\partial z}=0$ و $\frac{\partial \varepsilon}{\partial z^*}=0$ باشد، پس $\frac{\partial \varepsilon}{\partial x}=0$ و $\frac{\partial \varepsilon}{\partial y}=0$ است و برعکس. از آنجا که $\mathcal{E}$ یک تابع حقیقی است، رابطه زیر صادق است:

$$\frac{\partial \varepsilon}{\partial z^*}=\left(\frac{\partial \varepsilon}{\partial z}\right)^* \tag{٥}$$

پس معادلات (۳) و (٤) را می‌توان بصورت زیر نوشت:

$$\frac{\partial \varepsilon}{\partial x}=2\,Re\left(\frac{\partial \varepsilon}{\partial z^*}\right) \tag{٦}$$

$$\frac{\partial \varepsilon}{\partial y}=2\,Im\left(\frac{\partial \varepsilon}{\partial z^*}\right) \tag{۷}$$

بنابراین، برای آنکه نقاط حداقل (یا حداکثر یا نقاط عطف) تابع خطا را برای $\frac{\partial \varepsilon}{\partial x}=\frac{\partial \varepsilon}{\partial y}=0$ به دست آوریم، کافی است که مشتق $\mathcal{E}$ را نسبت به z^* محاسبه کرده و برابر صفر قرار دهیم:

$$\frac{\partial \varepsilon}{\partial z^*}=F^*\frac{\partial F}{\partial z^*}+F\frac{\partial F^*}{\partial z^*}=0 \tag{۸}$$

در نتیجه، یا F=0 یا $\frac{\partial F}{\partial z^*}=\frac{\partial F}{\partial z}=0$ منجر به $\frac{\partial \varepsilon}{\partial z^*}=0$ می‌شود و برعکس. برای یافتن یک صفر تابع F، ابتدا مقادیر اولیه‌ای را برای x و y اختیار می‌کنیم و از یک الگوریتم بهینه‌سازی برای تعیین یک حداقل محلی $\mathcal{E}$ متناظر با یک صفر تابع F استفاده می‌کنیم. [۲-۳]

برای بعضی از توابع مانند چند جمله‌ایها، یک صفر به دست آمده را می‌توان از تابع تفکیک کرد. در هر حال، با اختیار مقدار اولیه دیگری برای x و y در مجاورت یک حداقل محلی دیگر، صفر دیگر تابع را می‌توان توسط الگوریتم بهینه‌سازی به دست آورد.

برای مثال، در مبحث تشدیدکننده‌های میکروویو، معادلات متعالی[1] شبیه [۱۳، صفحه ۵۱۸].

$$tan\,x + Ax = 0 \tag{۹}$$

یا شبیه [۱٤، صفحه ۲٦٤]

$$tan\,x - \frac{B}{x}=0 \tag{۱۰}$$

پدید می‌آید که می‌توان توسط روش کمترین مربعات حل کرد. توابع خطای متناظر عبارتند از:

$$\varepsilon_1=\left(tan\,x + Ax\right)^2 \tag{۱۱}$$

$$\varepsilon_2=\left(tan - \frac{B}{x}\right)^2 \tag{۱۲}$$

که در نقاط $x=(2n+1)\frac{\pi}{2}$ با n برابر یک عدد صحیح بی‌نهایت می‌شود و در نقطه‌ای بین آنها تابع خطا یک صفر محلی دارد. بنابراین، با استفاده از یک روش بهینه‌سازی و

1. Transcendental Function

مشتق‌گیری توابع خطا، صفر معادلات متعالی سابق‌الذکر به دست می‌آید. توجه می‌کنیم که در نقاط حداکثر تابع خطا(با اندازه‌ای برابر بی نهایت) مشتق تابع خطا صفر نمی‌شود.

بعنوان مثال دوم، صفرهای یک چند جمله‌ای کلی دارای ضرایب مختلط (a_n)

$$F(z)=\sum_{n=0}^{N} a_n \ z^n \tag{۱۳}$$

را نیز می‌توان با روش کمترین مربعات تعیین کرد. تابع خطا عبارتست از:

$$\varepsilon = F(z)F^*(z)=\sum_{n=0}^{N}\ \sum_{m=0}^{N} a_n a_m^* z^n \left(z^*\right)^m \tag{۱٤}$$

مشتق‌هایش را می‌توان بسهولت توسط معادلات (٦) و (۷) محاسبه کرد.

بعنوان مثال سوم، حل یک مجموعه معادلات خطی شامل ضرایب مختلط را توسط روش کمترین مربعات در نظر می‌گیریم.

$$[L]\bar{z}=\bar{b} \tag{۱٥}$$

در اینجا [L] ماتریس ضرایب، $\bar{b}$ بردار ثابتهای مختلط و $\bar{z}$ بردار متغیرهای مختلط مجهول می‌باشد. تابع خطا عبارتست از:

$$\varepsilon=\left[[L]\bar{z}-\bar{b}\right]^{*T}\left[[L]\bar{z}-\bar{b}\right] \tag{١٦}$$

در اینجا ترانهاده یک ماتریس توسط T نشان داده می‌شود. مشتق را نسبت به z_n^* می‌گیریم و برابر صفر قرار می‌دهیم:

$$\nabla^*\varepsilon=\left[\frac{\partial\varepsilon}{\partial z_1^*},\frac{\partial\varepsilon}{\partial z_2^*},\ldots,\frac{\partial\varepsilon}{\partial z_N^*}\right] \tag{۱۷}$$

$$=[L]^{*T}\left[[L]\bar{z}-\bar{b}\right]=0 \tag{۱۸}$$

در نتیجه:

$$[L]^{*T}[L]\bar{z}=[L]^{*T}\bar{b} \tag{۱۹}$$

در واقع این معادله خطی از ضرب $[L]^{*T}$ در معادله (۱٥) به دست می‌آید. تعداد معادلات‌اش برابر تعداد مجهولات است، هر چند که معاله (۱٥) این چنین نباشد.

$$\bar{z}=\left[[L]^{*T}[L]\right]^{-1}[L]^{*T}\bar{b} \tag{۲۰}$$

ماتریس $[L]^{*T}[L]$ هرمیتی است و از الگوریتم "چولسکی"[1] [۳] می‌توان برای معکوس کردناش استفاده کرد. جواب حاصل از لحاظ کمترین مربعات بهینه است، زیرا اندازه تابع خطا برای این جواب حداقل می‌باشد.

بعنوان مثال چهارم، حل یک مجموعه معادلات غیر خطی چند مجهولی را توسط روش کمترین مربعات بررسی می‌کنیم. برای سادگی تعداد M معادله غیر خطی تابع تعداد N متغیر مختلط را در نظر می‌گیریم.

$$f_m\left(z_1 z_2,\ldots,z_N\right)=0\ ,\ m=1,2,\ldots,M \tag{۲۱}$$

تابع خطا و مشتق‌اش نسبت به z_K^* عبارتند از:

$$\begin{aligned}\varepsilon&=\sum_{m=1}^{M} f_m f_m^*\\ \frac{\partial\varepsilon}{\partial z_k^*}&=\sum_{m=1}^{M} f_m\frac{\partial f_m^*}{\partial z_k^*}\qquad k=1,2,3,\ldots N\end{aligned} \tag{۲۲}$$

که با استفاده از یک روش کمینه‌سازی و معادلات (٦) و (۷)، مجهولهای z_k به دست می‌آید.

۳- برازش منحنی به داده‌های اندازه‌گیری [٤]

فرض کنید که می‌خواهیم ترکیب خطی یک مجموعه توابع معلوم $f_n(z)$ را برای برازش منحنی به داده‌های اندازه‌گیری به کار بریم.

$$g(z)=\sum_{n=1}^{N} a_n f_n(z) \tag{۲۳}$$

در اینجا $f_n(z)$ توابع مشخصی است که برای یک مجموعه چند جمله‌ایها می‌تواند بصورت $f_n=z^n$ باشد، N تعداد توابع و a_n ضرایب مجهول می‌باشد. تعداد داده‌های w_i در نقاط z_i برابر M است. بنابراین، انحراف منحنی برازش از داده در نقطه z_i برابر است با

1. Cholescky

$$r_i = w_i - \sum_{n=1}^{N} a_n f_n(z_i) \tag{۲۴}$$

بنابراین، مجموع مجذور انحرافات را به دست می‌آوریم.

$$\begin{aligned}\varepsilon &= \sum_{i=1}^{M} |r_i|^2 \\ &= \sum_{i=1}^{M} \left[w_i - \sum_{n=1}^{N} a_n f_n(z_i) \right] \left[w_i - \sum_{n=1}^{N} a_n f_n(z_i) \right]^* \end{aligned} \tag{۲۵}$$

مشتق ε را نسبت بـه a_m^* محاسبه کـرده و برابـر صفـر قـرار می‌دهیم و در نتیجه معادله خطی زیر را به دست می‌آوریم:

$$\begin{aligned} &[L_{mn}][a_n] = [b_m] \quad \Rightarrow [a_n] = [L_{nm}]^{-1}[b_m] \\ &L_{mn} = \sum_{i=1}^{M} f_m^*(z_i) f_n(z_i) \ , \quad b_m = \sum_{i=1}^{M} w_i f_m^*(z_i) \end{aligned} \tag{۲۶}$$

۴- ضرایب سری فوریه تعمیم یافته [۴-۷]

فرض کنید که تـابع f(x) را بتوانیـم بصـورت یـک مجموعـه توابع حقیقی متعامد $\phi_n(x)$ در فاصله [a,b] بسط دهیم.

$$f(x) = \sum_{n=1}^{N} C_n \phi_n(x) \tag{۲۷}$$

در اینجا C_n ضرایب فوریـه هسـتند. تـابع خطـای متنـاظر را بصورت زیر می‌سازیم:

$$\varepsilon = \int_a^b \left[\sum_n C_n \phi_n(x) - f(x) \right]^2 dx \tag{۲۸}$$

برای تعداد محدود توابع پایه، حداقل تابع خطا ε بهترین نمـایش تـابع f(x) را توسـط سـری (۲۷) از لحـاظ کمـترین مربعـات در فاصلـه [a,b] نشـان می‌دهـد. کلیـه مشـتقهای ε نسبت به C_k در نقطه حداقل برابر صفر می‌باشد.

$$\begin{aligned} &\frac{\partial \varepsilon}{\partial C} = \\ &2\sum_{n=1}^{N} C_n \int_a^b \phi_n(x)\phi_k(x)dx - 2\int_a^b f(x)\phi_k(x)dx \end{aligned} \tag{۲۹}$$

بنابراین بر طبق تعامد توابع پایه ϕ_n، ضرایب فوریه به دسـت می‌آید.

$$C_k = \frac{\int_a^b f(x)\phi_k(x)dx}{\int_a^b [\phi_k(x)]^2 dx} \tag{۳۰}$$

این رابطه را می‌توان از طریق ضرب مسـتقیم سـری (۲۷) در ϕ_k و انتگرال‌گیری نیز به دست آورد. اگر مجموعه توابـع پایه متعامد و بهنجار شده باشند، مخرج کسر (۳۰) برابـر یـک خواهد بود. اگر توابع پایه مجموعه متعامدی را تشکیل ندهند، ولی معهذا تابع f(x) را در فاصله مطلوب نمایش دهند، معادله ماتریسی زیر به دست می‌آید.

$$\begin{aligned} &[l_{ij}][C_j] = [b_i] \\ &l_{ij} = \int_a^b \phi_i(x)\phi_j(x)dx \\ &b_i = \int_a^b f(x)\phi_i(x)dx \end{aligned} \tag{۳۱}$$

۵- معادلات با کارگردانهای خطی [۳۴]

می‌خواهیم معادله خطی ناهمگن

$$L(f)=g \tag{۳۲}$$

را حل کنیم که در آن L کارگردان خطی، f تابع پاسخ مجـهول و g تابع تحریک معلـوم اسـت. ایـن معادلـه در فاصلـه [a,b] تعریف می‌شود.

تابع تفاضل u=L(f)-g و تابع خطـائی را بصـورت ضـرب داخلی زیر تعریف می‌کنیم:

$$\begin{aligned} \varepsilon &= \langle u, u^* \rangle = \int_a^b u u^* dx \\ &= \int_a^b [L(f) - g][L^*(f^*) - g]dx \end{aligned} \tag{۳۳}$$

فرض کنید که تابع f را بتوان بصورت جمع توابـع پایـه f_n نوشت

$$f = \sum_{n=1}^{N} a_n f_n \tag{۳۴}$$

در اینجا a_n ضرایب مختلط مجهول هسـتند. معادلـه (۳۴) را در معادله (۳۲) و سپس در معادله (۳۳) جایگزین می‌کنیـم. برای تعیین ضرایب مجهول a_n و نقطـه حداقـل تـابع خطـا، مشتق ε را نسبت به a_m^* گرفته و برابر صفر قرار می‌دهیم. در

نتیجه، معادلات زیر حاصل می‌شود:

$$[l_{mn}][a_n]=[g_m] \qquad (۳۵)$$

$$l_{mn}=<L(f_m),L^*(f_n^*)>=\int_a^b L(f_m)L^*(f_n^*)\,dx$$
$$g_m=<g,L^*(f_m^*)>=\int_a^b gL^*(f_m^*)\,dx \qquad (۳۶)$$

واضح است که توابع وزنی مورد بحث در روش ممان [۸]، در اینجا بطور طبیعی بصورت $L^*(f_m^*)$ در تحلیل ظاهر می‌شود.

برای مثال، معادله دیفرانسیل

$$-\frac{d^2 f}{dx^2}=1+4x^2 \qquad (۳۷)$$

را تحت شرایط مرزی $f(0)=f(1)=0$ توسط روش کمترین مربعات حل می‌کنیم [۸]. کارگردان خطی $L=-\frac{d^2}{dx^2}$ است.

فرض می‌کنیم که تابع f را بصورت مجموع توابع پایه

$$f=\sum_{n=1}^{N} a_n\left(x-x^{n+1}\right) \qquad (۳۸)$$

که شرایط مرزی را ارضاء می‌کند، نمایش دهیم. تابع وزنی در مرجع [۸] بصورت $f_m=x-x^{m+1}$ فرض شده است، در صورتی که در اینجا تابع وزنی عبارتست از:

$$L^*(f_m^*)=-\frac{d^2}{dx^2}\left(x-x^{m+1}\right)=m(m+1)x^{m-1} \qquad (۳۹)$$

بنابراین، با استفاده از معادلات (۳۶) و (۳۹) داریم

$$l_{mn}=\frac{mn(m+1)(n+1)}{m+n-1},\quad g_m=\frac{(m+1)(5m+2)}{m+2} \qquad (۴۰)$$

در نتیجه،

$$N=1,\quad a_1=\frac{7}{6}$$

$$N=2,\quad \begin{bmatrix}4 & 6\\ 6 & 12\end{bmatrix}\begin{bmatrix}a_1\\ a_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\frac{14}{3}\\ 9\end{bmatrix}\quad a_1=\frac{1}{6},\quad a_2=\frac{2}{3}$$

$$N=3,\quad \begin{bmatrix}4 & 6 & 8\\ 6 & 12 & 18\\ 8 & 18 & \frac{144}{5}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}a_1\\ a_2\\ a_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\frac{14}{3}\\ 9\\ \frac{68}{5}\end{bmatrix}\quad a_1=\frac{1}{2},\quad a_2=0\quad a_3=\frac{1}{3}$$

بنابراین، جواب دقیق برای N=۳ یعنی $f=\frac{1}{2}\left(x-x^2\right)+\frac{1}{3}\left(x-x^4\right)$ به دست می‌آید.

ممکن است توابع پایه‌ای که شرایط مرزی را ارضاء می‌کند، وجود نداشته باشد و یا حداقل شناسائی و انتخاب‌شان واضح نباشد. بنابراین، در کاربرد روش کمترین مربعات، می‌توان تابع پایه را بر مبنای ویژگیهای دیگر مسئله انتخاب کرد و تابع خطا را بصورت جمع خطاهای ناشی از معادله خطی و شرایط مرزی متناظرش ساخت. شرایط مرزی را بصورت کلی زیر می‌نویسیم:

$$\overline{M}(f)=\overline{C} \qquad (۴۱)$$

در اینجا $\overline{M}$ یک بردار شامل تابعکهای (فانکشنال) خطی و $\overline{C}$ یک بردار ثابت است. عناصر $\overline{M}$ شامل عبارات و کارگردانهائی هستند که شرایط مرزی را نمایش می‌دهد. بسط f در معادله (۳۴) را در معادله (۴۱) جایگزین می‌کنیم و سپس خطای جزئی ناشی از شرایط مرزی را می‌سازیم و مشتق‌اش را نسبت به a_m^* می‌گیریم.

$$\varepsilon_1=\left[\sum_n a_n\overline{M}(f_n)-\overline{C}\right]^T\left[\sum_n a_n\overline{M}(f_n)-\overline{C}\right]^*$$
$$\frac{\partial\varepsilon_1}{\partial a_m^*}=\left[\sum_n a_n\overline{M}(f_n)-\overline{C}\right]^T\overline{M}^*(f_m^*) \qquad (۴۲)$$

بنابراین، عناصر معادله (۳۵) عبارتند از:

$$l_{mn}=<L(f_m),L^*(f_n^*)>+\left[\overline{M}(f_n)\right]^T\overline{M}^*(f_m^*) \qquad (۴۳)$$

$$g_m=<g,L^*(f_m^*)>+\overline{C}^T\overline{M}^*(f_m^*) \qquad (۴۴)$$

مثال سابق‌الذکر را با فرض توابع پایه x^n (که شرایط مرزی را ارضاء نمی‌کند)، حل می‌کنیم. شرایط مرزی را بصورت معادله (۴۱) می‌نویسیم که اجزایش عبارتند از:

$$\overline{M}(f)=\begin{bmatrix}f(0)\\ f(1)\end{bmatrix},\quad \overline{C}=\begin{bmatrix}0\\ 0\end{bmatrix}$$

با توجه به $f=\sum_n a_n x^n$ و شرط مرزی، $a_0=0$ است، پس $\overline{C}=[0]$ و $\overline{M}=[1]$. بنابراین،

$$<L(f_m),L(f_m)>=\frac{mn(m-1)(n-1)}{m+n-3}$$
$$<L(f_m),g>=-\frac{m(5m-3)}{m+1},$$
$$<L(f_1),g>=0$$
$$\left[\overline{M}(f_n)\right]^T\overline{M}^*\left(f_m^*\right)=1,\quad \overline{C}^T\overline{M}^*\left(f_m^*\right)=0$$
$$\begin{bmatrix}1&1&1&1\\1&5&7&9\\1&7&13&19\\1&9&19&\frac{149}{5}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}a_1\\a_2\\a_3\\a_4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\-\frac{14}{3}\\-9\\-\frac{68}{5}\end{bmatrix}$$
$$[a_n]=\left[\frac{5}{6},-\frac{1}{2},\ 0,\ -\frac{1}{3}\right]$$

۶- معادلات انتگرالی [۳۴، ۸۲-۸۴]

معادله انتگرالی می‌تواند از نوع "ولترا" یا "فردهولم" و یا از نوع اول یا نوع دوم باشد. حل عددی این گونه معادلات انتگرالی را می‌توان توسط روش کمترین مربعات انجام داد. برای مثال، معادله انتگرالی "فردهولم" از نوع اول را در نظر بگیرید که بصورت معادلات "پاکلینکتون" و "هالن" در مبحث آنتها و تشعشع پدید می‌آید:

$$\int_a^b K(x,y)g(y)dy=f(x) \qquad (۴۵)$$

در اینجا تابع K(x,y) هسته (کرنل) معادله می‌باشد. معادله انتگرالی در فواصل $c\le x\le d\ ,\ a\le y\le b$ تعریف شده است. تابع g(y) مجهول بوده و می‌باید تعیین شود. ابتداء فاصله [a,b] برای متغیر y را به N قسمت با پهنای $\delta=(b-a)/N$ تقسیم می‌کنیم. مرکز هر قسمت در نقطه $y_n=a+(2n-1)\delta/2$ با n=1,2,...,N قرار دارد. تابع پله در نقطه $y=y_n-\delta/2$ را بصورت $U(y-y_n+\delta/2)$ و در نقطه $y=y_n+\delta/2$ را بصورت $U(y-y_n-\delta/2)$ تعریف می‌کنیم. سپس تابع پالس با مرکزش در نقطه y_n را مطابق شکل ۱ بصورت مجموع دو تابع پله نمایش می‌دهیم.

$$P_n=P(y-y_n)$$
$$=U(y-y_n+\delta/2)-U(y-y_n-\delta/2)$$

بنابراین، تابع g(y) را توسط یک رشته توابع پالس تقریب می‌زنیم.

$$g(y)=\sum_{n=1}^{N}C_nP_n \qquad (۴۶)$$

یعنی اندازه‌اش در فاصله δ حول y_n برابر $C_n=g(y_n)$ ثابت فرض می‌شود. معادله (۴۶) را در معادله (۴۵) جایگزین می‌کنیم.

$$f(x)=\int_a^b K(x,y)\sum_{n=1}C_nP_ndy$$
$$=\sum_n C_n\int_{a+(n-1)\delta}^{a+n\delta}K(x,y)dy\cong\delta\sum_n C_nK_n(x) \qquad (۴۷)$$

در تقریب اخیر اندازه هسته در هر زیر فاصله حول y_n ثابت با نماد $K_n(x)=K(x,y_n)$ فرض شده است. هر قدر اندازه زیر فاصله‌ها (δ) کوچکتر باشد، دقت محاسبات بیشتر خواهد بود. حال، تابع خطائی در فاصله $c\le x\le d$ می‌سازیم.

$$\varepsilon=\int_c^d\left|\sum_n C_n\int_{a+(n-1)\delta}^{a+n\delta}K(x,y)dy-f(x)\right|^2dx \qquad (۴۸)$$

که تابع دامنه پالسها (C_n) است. نقطه حداقل ε مجموعه دامنه‌ها را از لحاظ کمینه‌سازی کمترین مربعات به دست می‌دهد. مشتق جزئی ε نسبت به مزدوج مختلط C_n^* یک دستگاه معادلات خطی برای تعیین C_n به دست می‌دهد.

$$[l_{mn}][C_n]=[g_m] \qquad (۴۹)$$

$$l_{mn}=$$
$$\int_{x=c}^{d}\left[\int_{a+(n-1)\delta}^{a+n\delta}K(x,y)dy\right]\left[\int_{a+(m-1)\delta}^{a+m\delta}K(x,y)dy\right]^*dx$$
$$=\int_c^d K_n(x)K_m^*(x)dx$$

$$g_m=\int_{x=c}^{d}f(x)\left[\int_{a+(m-1)\delta}^{a+m\delta}K^*(x,y)dy\right]dx$$
$$\cong\int_c^d f(x)K_m^*dx \qquad (۵۰)$$

تقریب دقیقتر g(y) توسط یک رشته توابع مثلثی مطابق شکل ۲ است.

$$g(y)=\sum_n C_nT(y,y_n) \qquad (۵۱)$$

فاصله [a,b] به (N+1) قسمت با پهنای $\delta=(b-a)/(N+1)$ تقسیم شده است. تابع مثلثی حول نقطه با n=1,2,...,N بصورت زیر تعریف می‌شود:

$$T_n = T(y,y_n) = \begin{cases} 1-\frac{1}{\delta}|y-y_n| & |y-y_n| \le \delta \\ 0 & |y-y_n| \ge \delta \end{cases} \qquad (۵۲)$$

انجام عملیات معمول جایگزینی معادله (۵۱) در معادله (۴۵)، انتقال f(x) به طرف چپ معادله، ضرب معادله حاصل در مزدوجش، انتگرال‌گیری نسبت به x در فاصله مطلوب [a,b] مشتق‌گیری نسبت به مزدوج دامنه توابع مثلثی $\left(C_n^*\right)$ و برابر صفر قرار دادنش، منجر به معادله خطی (۳۲) با کمیات زیر می‌شود:

$$l_{mn}= \int_c^d dx\left[\int_{y_n-\delta}^{y_n+\delta} K(x,y)T(y,y_n)dy \int_{y_m-\delta}^{y_m+\delta} K^*(x,y')T(y',y_m)dy'\right] \qquad (۵۳)$$

$$g_m = \int_c^d dxf(x)\left[\int_{y_m-\delta}^{y_m+\delta} K^*(x,y)T(y,y_m)dy\right] \qquad (۵۴)$$

ممکن است که انتگرالهای سابق‌الذکر بطور تحلیلی قابل محاسبه نباشد. در این صوررت لازم است که از روشهای مختلف انتگرال‌گیری عددی استفاده کرد [۴-۷]. معمولاً محاسبه عنصر (درآیه) ماتریسهای سابق‌الذکر بیشترین زمان کامپیوتر را اشغال می‌کند. بنابراین، لازم است که از خواص ماتریسی هر میتی استفاده کرد و تنها تقریباً نیمی از عناصرش را محاسبه کرد و روش "چولسکی" را برای معکوس کردنش به کار برد.

تابع پایه تمام حوزه بصورت معادله چند جمله‌ای را نیز می‌توان به کار برد.

$$g(y) = \sum_{n=0}^{N} C_n y^n \qquad (۵۵)$$

در این حالت داریم

$$l_{mn} = \int_c^d dx\left[\int_a^b y^n K(x,y)dy\right]\left[\int_a^b y'^m K^*(x,y')dy'\right] \qquad (۵۶)$$

$$g_m = \int_c^d dxf(x)\left[\int_a^b y'^m K^*(x,y')dy'\right] \qquad (۵۷)$$

در روش کمترین مربعات، همانند روش ممان و روشهای عددی دیگر بعضی مسائل همگرائی پدید می‌آید که باید توسط کاربرد تکنیکهای خاص حل شود.

حل معادلات "هالن" و "پاکلینکتون" برای انواع مختلف آنتنهای سیمی (مانند دوقطبی، دوقطبی تاشده و یاگی‌یودا) توسط روش کمترین مربعات حل شده است [۷۹-۸۴]

۷- حل مسائل الکتریسیته ساکن [۳۰-۳۲]

مسائل الکتریسیته ساکن تحت یک معادله دیفرانسیل همگن همراه با شرایط مرزی را می‌توان توسط روش باقیمانده مرزی کمترین مربعات (LSBRM) حل کرد [۳۱]. درون یک حوزه مکانی محاط در سطح $S = S_1 + S_2$ را در نظر بگیرید. فرض کنید که معادله حاکم بر تابع

$$L[\Phi(\bar{r})] = 0 \qquad (۵۸)$$

تحت شرایط مرزی "دیریکله" روی سطح S_1 با بردار مکانی $\bar{r}_1$

$$\Phi(\bar{r}_1) = \Phi_1(\bar{r}_1) \qquad \text{(۵۹) روی } S_1 \text{ با } \bar{r}_1$$

و شرط مرزی "نویمن" روی سطح S_2 با بردار مکانی $\bar{r}_2$

$$\frac{\partial\Phi(\bar{r}_2)}{\partial n} = \Phi_2(\bar{r}_2) \qquad \text{(۶۰) روی } S_2 \text{ با } \bar{r}_2$$

باشد. (n متغیر عمود بر سطح است.) فرض کنید تابع Φ را بتوان بطور تقریبی بصورت یک مجموعه محدود توابع پایه $\varphi_n(\bar{r})$ (برای n=1,2,...,N) که در معادله (۵۸) صدق می‌کند، نوشت.

$$\Phi(\bar{r}) = \sum_{n=1}^{N} a_n \varphi_n(\bar{r}) \qquad (۶۱)$$

تابع خطائی را از لازمه اقناع شرایط مرزی بصورت زیر می‌سازیم:

$$\varepsilon = \int_{S_1} \left|\Phi_1(\bar{r}_1) - \Phi(\bar{r}_1)\right|^2 ds_1 + \alpha \int_{S_2} \left|\Phi_2(\bar{r}_2) - \frac{\partial \Phi(\bar{r}_2)}{\partial n}\right|^2 ds_2 \qquad (۶۲)$$

در اینجا α یک ضریب وزنی است که اندازه نسبی ارضاء شرط مرزی نویمن را نسبت به شرط مرزی دیریکله مشخص می‌کند. بسط تابع Φ در معادله (۶۱) را در معادله (۶۲) جایگزین می‌کنیم و مشتق ε را نسبت به a_m می‌گیریم و برابر صفر قرار می‌دهیم. معادله حاصل را بصورت معادله (۳۵) می‌نویسیم:

$$l_{mn} = \int_{S_1} \varphi_m(\bar{r}_1)\varphi_n(\bar{r}_1) ds_1 + \alpha \int_{S_2} \frac{\partial \varphi_m(\bar{r}_2)}{\partial n} \frac{\partial \varphi_n(\bar{r}_2)}{\partial n} ds_2 \qquad (۶۳)$$

$$g_m = \int_{S_1} \Phi_1(\bar{r}_1)\varphi_m(\bar{r}_1) ds_1 + \alpha \int_{S_2} \Phi_2(\bar{r}_2) \frac{\partial \varphi_m(\bar{r}_2)}{\partial n} ds_2 \qquad (۶٤)$$

در مرجع [۳۱]، این روش برای حل مسائل الکتریسیته ساکن و محاسبه جریانهای "ادی" (چرخه‌ای[1]) به کار رفته است.

۸- روش باقیمانده مرزی کمترین مربعات [۳۳-٥٤]

مسئله مقادیر مرزی شامل حل یک معادله دیفرانسیل تحت شرایط مرزی بکرات در مهندسی الکترومغناطیس پدید می‌آید و قابل تحلیل توسط روش باقیمانده مرزی کمترین مربعات می‌باشد. حل مسئله الکتریسیته ساکن در بخش قبل از این موارد است. مسئله دیگر تحلیل پیوندگاه موجبرهای استوانه‌ای است. پیوندگاه دو موجبر با سطح مقطع اختیاری یکنواخت هم راستا را مطابق شکل ۳ در نظر بگیرید که شامل غشاء فلزی و روزنه‌هائی است.

موجبر خروجی تطبیق شده است. میدان الکترومغناطیسی داخل موجبر را می‌توان بصورت یک مجموعه بی‌نهایت مودهای TM و TE نوشت. تحریک از طریق موجبر ورودی توسط یک یا چند مود منتشر شونده انجام می‌گیرد. کلیه مودهای منتشر شونده و میرای رونده در جهت +z در موجبر خروجی و رونده در جهت z- در موجبر ورودی ایجاد می‌شود. این مودها باید کلیه شرایط مرزی را روی دیواره جانبی موجبرهای استوانه‌ای یکنواخت (۱) و (۲) اقناع کند. بنابراین، میدانهای الکتریکی و مغناطیسی عرضی در سطح پیوندگاه به ترتیب در دو طرفش در موجبر ورودی با $z = o^-$ و در موجبر خروجی با $z = o^+$ را می‌توان بر حسب توابع مودی TE و TM بصورت زیر نوشت:

$$\begin{aligned}
\bar{E}_{1t} &= \sum_{m,n}\left(A^+_{mn} + A^-_{mn}\right)\bar{e}^e_{1,mn} + \sum_{m,n}\left(B^+_{mn} - B^-_{mn}\right)\bar{e}^m_{1,mn} \\
\bar{H}_{1t} &= \sum_{m,n}\left(A^+_{mn} - A^-_{mn}\right)\bar{h}^e_{1,mn} + \sum_{m,n}\left(B^+_{mn} + B^-_{mn}\right)\bar{h}^m_{1,mn} \qquad z = 0^- \\
\bar{E}_{2t} &= \sum_{p,q} C_{pq}\bar{e}^e_{2,pq} + \sum_{p,q} D_{pq}\bar{e}^m_{2,pq} \\
\bar{H}_{2t} &= \sum_{p,q} C_{pq}\bar{h}^e_{2,pq} + \sum_{p,q} D_{pq}\bar{h}^m_{2,pq} \qquad z = 0^+
\end{aligned} \qquad (٦٥)$$

در اینجا تابع مودهای الکتریکی و مغناطیسی به ترتیب با $\bar{e}^e$ و $\bar{e}^m$، زیرنویسهای ۱ و ۲ به ترتیب برای موجبرهای ورودی و خروجی، دامنه مودها با C،B،A و D و دامنه مودهای پیشرونده و پسرونده به ترتیب با رونویسهای + و − نشان داده شده‌اند.

شرایط مرزی در سطح پیوندگاه عبارتند از: ناپیوستگی مؤلفه مماسی میدان $\bar{H}$ به اندازه چگالی جریان الکتریکی سطحی اعمالی $\bar{J}_S$ در روزنه، ناپیوستگی مؤلفه مماسی میدان $\bar{E}$ به اندازه چگالی جریان مغناطیسی سطحی اعمالی $\bar{M}_S$ در روزنه (که احیانا در مسئله فرض شده است) و صفر شدن مولفه مماسی میدان $\bar{E}$ روی سطح غشاء فلزی در پیوندگاه به طرف موجبرهای ورودی و خروجی. (شرایط مرزی روی مولفه عمودی میدانها تابع شرایط مرزی روی مولفه مماسی

1. Eddy Currents

میدانها است و به تبع آن ارضاء می‌شود.) شرایط مرزی روی مولفه مماسی میدانها را بصورت برداری شامل چهار درآیه می‌نویسیم.

$$\bar{u}=\begin{Bmatrix}\sqrt{\alpha}\left[\hat{u}_z\times\left(\bar{H}_{2t}-\bar{H}_{1t}\right)-\bar{J}_S\right],\ \hat{u}_z\times\left(\bar{E}_{2t}-\bar{E}_{1t}\right)+\bar{M}_S\\ \hat{u}_z\times\bar{E}_{1t},\hat{u}_z\times\bar{E}_{2t}\end{Bmatrix}$$
$$=L\,\bar{V}-\bar{f} \qquad (٦٦)$$

در اینجا $\bar{V}$ بردار دامنه مودهای تحریک شده مجهول $C_{pq}, B_{mn}^{-}, A_{mn}^{-}$ و D_{pq} بوده، $\bar{f}$ بردار تحریک شامل دامنه مودهای تابشی B_m^{+}, A_m^{+} و جریانهای سطحی الکتریکی $\bar{J}_s$ و مغناطیسی $\bar{M}_s$ در سطح پیوندگاه و L ماتریسی با درآیه‌هائی بر حسب توابع مودی است. ضریب وزنی α برای هم ارز کردن اندازه شرایط مرزی الکتریکی و مغناطیسی اضافه شده است.

حال، تابع خطای ε را به صورت انتگرال سطحی (روی سطح مرزی پیوندگاه b.s.) حاصلضرب داخلی بردار $\bar{u}$ در مزدوج ترانهاده‌اش $\bar{u}^*$ (در نواحی که هر درآیه بردار شرایط مرزی صادق است) تعریف می‌کنیم.

$$\varepsilon=<\bar{u}^*,\bar{u}>=\int_{b.s.}\bar{u}^*.\bar{u}ds$$
$$=\bar{V}^*<L^*,L>\bar{V}-\bar{V}^*<L^*,\bar{f}>-<\bar{f}^*,L>\bar{V}+<\bar{f}^*,\bar{f}> \qquad (٦٧)$$

کارگردان $<L^*,L>$ بصورت ضرب ماتریسی L^* (مزدوج ترانهاده L) در L تعریف می‌شود، بطوری که هر ضرب در واقع ضرب داخلی یک بردار در مزدوج بردار دیگری است که روی سطح مربوطه پیوندگاه انتگرال گرفته می‌شود. کارگردانهای دیگر در معادله (٦٧) نیز به همین ترتیب تعریف می‌شود.

برای تعیین نقطه حداقل تابع خطا، مشتق‌اش را نسبت به مزدوج هر یک از دامنه مودها V_i^* گرفته و برابر صفر قرار می‌دهیم. در نتیجه، بردار دامنه مودها در نقطه حداقل تابع خطا به دست می‌آید.

$$\bar{V}_{mn}=<L^*,L>^{-1}<L^*,\bar{f}> \qquad (٦٨)$$

حداقل اندازه تابع خطا از جایگزینی $\bar{V}_{mn}$ در معادله (٦٧) تعیین می‌شود.

$$\varepsilon=<\bar{f}^*,\bar{f}>-<\bar{f}^*,L>\bar{V}_{mn}$$
$$=<\bar{f}^*,\bar{f}>-<\bar{f}^*,L><L^*,L>^{-1}<L^*,\bar{f}> \qquad (٦٩)$$

برای موجبرها با سطح مقطع‌های مختلف (مانند صفحات موازی، مستطیلی، دایره‌ای، بیضوی و غیره) تابع مودها را بر حسب تابع امواج نوشته و درآیه کارگردانهای سابق‌الذکر را محاسبه می‌کنیم. برای بعضی از روزنه‌ها با شکل هندسی ساده، انتگرالها را می‌توان بطور تحلیلی محاسبه کرد ولی برای اشکال هندسی پیچیده‌تر روزنه‌ها، انتگرالگیریها را باید به روش عددی انجام داد. پس از تعیین دامنه مودهای تحریک شده، سسپتانس معادل پیوندگاه به دست می‌آید. شایان ذکر است که اندازه ضریب وزنی α تاثیر زیادی بر اندازه دامنه مودهای محاسبه شده دارد و روشهای مناسبی مانند اصل بقاء توان، اصل بقاء واکنش و عدد وضعیت ماتریس باید برای تعیین محدوده اندازه بهینه α به کار رود [٣٤-٤٤]

٩- طراحی مبدلهای امپدانس [٥٥-٦٢]

طراحی مبدلهای امپدانس باریک شونده و خطوط پله‌ای برای تطبیق دو امپدانس در یک باند فرکانسی را می‌توان توسط روش عددی کمترین مربعات فرمولبندی و اجرا کرد. یک خط انتقال باریک شونده با طول L دارای امپدانس مشخصه Z(z) بصورت تابع فاصله z از منبع را مطابق شکل ٤ در نظر بگیرید که یک منبع ولتاژ با امپدانس داخلی Z_g را به یک امپدانس بار Z_L وصل می‌کند. فرض کنید که امپدانس مشخصه خط ورودی برابر امپدانس داخلی منبع $\left(Z_c=Z_g\right)$ بوده و در باند فرکانس مطلوب مقاومتی و ثابت باشد. کلیه امپدانسها نسبت به امپدانس مشخصه خط ورودی بهنجار شده‌اند.

$$\bar{Z}_c=1,\qquad \bar{Z}(z)=\frac{Z(z)}{Z_c},\qquad \bar{Z}_L=\frac{Z_L}{Z_c} \qquad (٧٠)$$

فرض می‌کنیم که نظریه انعکاسات کوچک حاکم باشد و

بتوان ضریب انعکاس در ورودی خط باریک شونده را بصورت زیر نوشت [۱۳]:

$$\begin{aligned}\Gamma_i &= \frac{1}{2}\int_0^L e^{-j2\beta z}\frac{d}{dz}\ln\overline{Z}(z)dz \\ &= \frac{1}{2}e^{-j2\beta L}\ln\overline{Z}(L)+j\beta\int_0^L e^{-j2\beta z}\ln\overline{Z}(z)dz\end{aligned} \qquad (۷۱)$$

عبارت اخیر توسط انتگرال‌گیری جزء به جزء به دست می‌آید. شرایط مرزی در دو انتهای خط عبارتند از:

$$\begin{aligned}&\overline{Z}(z=0)=\overline{Z}_c=1, &&z=0\\ &\overline{Z}(z=L)=\overline{Z}_L, &&z=L\end{aligned} \qquad (۷۲)$$

حال، توابع $\overline{Z}(z), \ln\overline{Z}(z)$ و $\frac{d}{dz}\ln\overline{Z}(z)$ را بصورت یک چند جمله‌ای، توابع پالسی (یا تقریب پله‌ای)، توابع مثلثی (یا تقریب خطی تکه‌وار) و یک کارگردان تقریبی بسط می‌دهیم [۸] و [۵۹].

به عنوان مثال، تابع $\frac{d}{dz}\ln\overline{Z}(z)$ را توسط یک چند جمله‌ای درجه N تقریب می‌زنیم.

$$\frac{d}{dz}\ln\overline{Z}(z)=\sum_{n=0}^{N}a_n z^n \qquad (۷۳)$$

$$\overline{Z}(z)=exp\left[\sum_{n=0}^{N}\frac{1}{n+1}a_n z^{n+1}+C\right] \qquad (۷٤)$$

در اینجا C یک ثابت است. با اعمال شرایط مرزی (۷۲)، اندازه C=0 است و a_0 بر حسب ضرایب دیگر چند جمله‌ای (a_n) به دست می‌آید. حال، a_0 را در معادله (۷٤) جایگزین می‌کنیم. عبارت حاصل برای $\overline{Z}(z)$ را در معادله (۷۱) قرار می‌دهیم و پس از انتگرال‌گیری، رابطه‌ای برای ضریب انعکاس ورودی به دست می‌آید [۵۹].

$$\Gamma_{ik}=t_k+\sum_{n=1}^{N}l_{nk}a_n \qquad (۷۵)$$

معمولا یک تطبیق امپدانس در یک باند فرکانس مورد نیاز است، که به تعداد K فرکانس منفرد تقسیم می‌شود. زیرنویس k نمایش‌دهنده k امین فرکانس است. عبارات برای t_k و l_{nk} در مرجع [۹] داده شده‌اند. سپس تابع خطائی را می‌سازیم:

$$\varepsilon=\sum_{k=1}^{K}\Gamma_{ik}\Gamma_{ik}^*=\sum_{k=1}^{K}\left(t_k+\sum_{n=1}^{N}l_{nk}a_n\right)\left(t_k^*+\sum_{n=1}^{N}l_{nk}^*a_n\right) \qquad (۷٦)$$

برای کمینه‌سازی تابع خطا، مشتقهای ε نسبت به a_n را برابر صفر قرار می‌دهیم. در نتیجه،

$$[a_n]=\left[Re\sum_{k=1}^{K}l_{nk}l_{mk}^*\right]^{-1}\left[-Re\sum_{k=1}^{K}l_{mk}^*t_k\right] \qquad (۷۷)$$

بنابراین، تعیین ضرایب چند جمله‌ای صرفا منجر به معکوس کردن یک ماتریس می‌شود.

برای بهینه‌سازی طول مبدل، مشتق ε را نسبت به L می‌گیریم. و از یک الگوریتم بهینه‌سازی مانند "پارتان" PARTAN [۲]برای کمینه‌سازی اندازه ε نسبت به L استفاده می‌کنیم. بالاخره، شکل مبدل توسط معادله (۷٤) تعیین می‌شود. کاربرد توابع پایه دیگر برای طراحی مبدل امپدانس باریک شونده و پله‌ای به تفضیل در مرجع [۵۹] شرح داده شده است.

طریقه دیگر طراحی یک مبدل خط پله‌ای با یک طول مشخص برای تطبیق دو امپدانس مختلط در یک پهنای باند فرکانسی معین توسط روش عددی کمترین مربعات امکان دارد. یک خط انتقال پله‌ای N قسمتی را در نظر بگیرید که مطابق شکل ۵ یک منبع ولتاژ V_g با امپدانس داخلی Z_g را به یک امپدانس بار Z_L وصل کند. امپدانس مشخصه پله i ام را حقیقی و مستقل از فرکانس فرض کرده و بصورت $Z_{o,i}$ نمایش می‌دهیم. ثابت انتشار در فرکانس k ام بصورت $\gamma_k=\alpha+j\beta_k$ بوده که در آن ضریب تضعیف α ثابت و مستقل از فرکانس فرض شده است. طول پله i ام برابر l_i است و فرض می‌کنیم که طول کلیه پله‌ها یکسان $\left(l=\frac{L}{N}\right)$ باشد. زیرنویس k، فرکانس را درباند مورد نظر مشخص می‌کند. ماتریس انتقال i امین پله با ادمیتانس

مشخصه $Y_{o,i}$ عبارتست از:

$$P_{i,k} = \begin{bmatrix} \cosh\gamma_k l_i & Z_{o,i}\sinh\gamma_k l_i \\ Y_{o,i}\cosh\gamma_k l_i & \cosh\gamma_k l_i \end{bmatrix} \qquad (۷۸)$$

ماتریس انتقال کل خط پله‌ای عبارتست از:

$$T_k = \begin{bmatrix} A_k & B_k \\ C_k & D_k \end{bmatrix} = \prod_{i=1}^{N} P_{ik} = P_{1,k}P_{2,k}P_{3,k}\dots P_{N,k} \qquad (۷۹)$$

ولتاژ و جریان ورودی (V_g, I_g) را می‌توان بر حسب ولتاژ و جریان بار (V_L, V_L) توسط ماتریس انتقال کل خط T_k بیان کرد. بنابراین، امپدانس ورودی خط پله‌ای $(Z_{in,k})$ مختوم به امپدانس بار $Z_{L,k} = \frac{V_L}{I_L}$ را می‌توان برحسب پارامترهای ماتریس انتقال خط نوشت:

$$Z_{in,k} = \frac{V_g}{I_g} = \frac{A_k Z_{L,k} + B_k}{C_k Z_{L,k} + D_k} \qquad (۸۰)$$

دو حالت را می‌توان برای ایجاد شرایط تطبیق تصور کرد. اولا، طراحی یک خط پله‌ای بی انعکاس $(\Gamma_{in} = 0)$ مستلزم $Z_{in,k} = Z_{g,k}$ است. ثانیا، طراحی یک خط پله‌ای برای حداکثر انتقال توان مستلزم تطبیق مزدوج $Z_{in,k} = Z^*_{g,k}$ است. حال، تابع خطائی را برای حالت تطبیق بی انعکاس می‌سازیم.

$$\varepsilon = \sum_{k=1}^{K}\left(Z_{in,k} - Z_{g,k}\right)\left(Z^*_{in,k} - Z^*_{g,k}\right) \qquad (۸۱)$$

پهنای باند مشخص شده به K فرکانس منفرد تقسیم شده است. برای کمینه‌سازی انعکاسات در پایانه‌های ورودی خط پله‌ای باید نقطه حداقل تابع خطا را که تابع امپدانس مشخصه و طول خط پله‌ای است، به دست آوریم. بنابراین، بهینه‌سازی ε را متناوبا نسبت به امپدانسهای مشخصه $Z_{o,j}$ و طول خط پله‌ای l_j انجام می‌دهیم. بدین منظور مشتق ε را نسبت به $Z_{o,j}$ و l_j لازم داریم. برای مثال،

$$\frac{\partial\varepsilon}{\partial Z_{o,j}} = 2\,Re\sum_{k=1}^{K}\left[\frac{\partial Z_{in,k}}{\partial Z_{o,j}}\left(Z^*_{in,k} - Z^*_{g,k}\right)\right] \qquad (۸۲)$$

مشتق $\partial Z_{in,k} / \partial Z_{o,j}$ با استفاده از معادلات (۷۸) تا (۸۰) به دست می‌آید [۵۶-۵۷و ۶۰-۶۲]

۱۰- طراحی بهینه پیوننده جهتی چند سوراخه [۶۳-۶۹]

پیوننده جهتی چند سوراخه متشکل از دو موجبر مستطیلی با یک دیواره (پهن یا باریک) مشترک شامل تعداد (N+1) روزنه مطابق شکل ٦ می‌باشد. فاصله ردیف سوراخها از لبه موجبر s و فاصله بین دو روزنه مجاور d_i است. شعاع روزنه i ام را برابر r_i فرض می‌کنیم. توان تابش در دهانه ورودی ۱ برابر P_{in}، توان منتقله در دهانه مستقیم ۲ برابر P_t، توان پیشرو در دهانه پیونیده ۳ برابر P_f و توان پسرو در دهانه مجزای ٤ برابر P_b است. ضریب پیوند C، ستمگرائی D و جدائی I برای پیوننده جهتی بصورت زیر تعریف می‌شود:

$$\begin{aligned} C &= 10\log_{10}\left(P_{in} / P_f\right) \\ D &= 10\log_{10}\left(P_f / P_b\right) \\ I &= 10\log_{10}\left(P_{in} / P_b\right) = C + D \end{aligned} \qquad (۸۳)$$

دامنه میدانهای پیشرونده و پسرونده از طریق n امین سوراخ از موجبر ورودی به موجبر خروجی در فرکانس k ام در باند مطلوب (f_k) به ترتیب عبارتند از:

$$\begin{aligned} F_{nk} &= K_{nk}r_n^3 = K_{nk}a_n \\ B_{nk} &= L_{nk}b_{nk} \\ b_{nk} &= a_n\, exp\left(-j2\beta_k\sum_{i=1}^{n} d_i\right) \end{aligned} \qquad (۸٤)$$

ضرایب پیوند امواج پیشرونده $\left(K_{nk} = A^+_{10} / A\right)$ و پسرونده $\left(L_{nk} = A^-_{10} / A\right)$ که از طریق n امین سوراخ در دیواره پهن (یا دیواره باریک) موجبر مستطیلی نشت می‌کند، در مراجع [۱۳ و ۱۵] ارائه شده است. A دامنه میدان تابش بر دهانه ورودی است و برای سادگی برابر یک (A=1) فرض شده است. میدانهای کل پیونیده پیشرونده و پسرونده به ترتیب عبارتند از:

$$F_k = A\exp\left(-j\beta_k \sum_{i=1}^{N} d_i\right)\sum_{n=0}^{N} K_{nk} a_n$$
$$B_k = A\sum_{n=0}^{N} L_{nk} b_{nk} \quad (۸۵)$$

در اینجا فاصله بین مراکز (i-1) امین و i امین سوراخ برابر d_i است.

بر طبق تعاریف D, C و I در معادلات (۸۳) داریم:

$$C=-10\,log_{10}\left|\frac{F}{A}\right|^2 \Rightarrow \left|\frac{F}{A}\right| = 10^{-(C/20)} = C_1$$
$$I=-10\,log_{10}\left|\frac{B}{A}\right|^2 \Rightarrow \left|\frac{B}{A}\right|^2 = 10^{-(I/10)} = I_1 \quad (۸۶)$$
$$D=-10\,log_{10}\left|\frac{B}{F}\right|^2 \Rightarrow \left|\frac{B}{F}\right|^2 = 10^{-(D/10)} = D_1$$

حال، می‌خواهیم یک پیونده جهتی چند روزنه‌ای با تعداد (N+1) سوراخ، ضریب پیوند (C) و ستمگرائی (D) (یا بطور معادل ضریب جدائی I=D+C) در باند فرکانسی از f_l تا f_u طراحی کنیم. باند فرکانسی مطلوب را بـه K فرکانس تقسیم می‌کنیم. در روش حاضر، شعاع سوراخها (r_i) و فاصله‌گذاری‌شان (s_i, d_i) با فرض مقادیر اولیه (اگر در نمونه الگوریتم لازم باشد) تعیین می‌شود. بنابراین، تابع خطاهای زیر را می‌سازیم.

$$\varepsilon_1 = \alpha\sum_{k=1}^{K}\left[-I+\left|B_k\right|^2\right]^2 + \sum_{k=1}^{K}\left[-C_1+\left|F_k\right|\right]^2$$
$$\varepsilon_2 = \alpha\sum_{k}\left|B_k\right|^2 + \sum_{k}\left[-C_1+\left|F_k\right|\right]^2 \quad (۸۷)$$
$$\varepsilon_3 = \alpha\sum_{k}\left[-D_1+\left|\frac{B_k}{F_k}\right|^2\right]^2 + \sum_{k}\left[-C_1+\left|F_k\right|\right]^2$$

در اینجا α یک ضریب وزنی است. الگوریتم بر مبنای تابع خطای ε_1، پیونده‌ای با مشخص کردن ضریب پیوند C و ضریب جدائی I طراحی می‌کند. الگوریتم ε_2، پیونده‌ای با مشخص کردن ضریب پیوند C و کمینه‌سازی توان خروجی از دهانه مجزا طراحی می‌کند. الگوریتم ε_3، پیونده‌ای با مشخص کردن ضریب پیوند و ضریب سمتگرائی طراحی می‌کند. طراحی توسط کاربرد یک الگوریتم بهینه‌سازی انجام می‌گیرد[۶۳].

چند الگوریتم برای طراحی پیونده خط پیونیده، خط شاخه‌ای و پیونده حلقوی نیز از طریق روش کمترین مربعات تدوین شده است و خواننده علاقمند به مراجع ارجاع داده می‌شود [۶۷-۶۹].

۱۱- سنتز پرتو آنتن [۷۰-۱۰۳]

روش عددی کمترین مربعات را می‌توان به طرق مختلف برای سنتز پرتو آنتن همراه با قیدهائی به کار برد. رابطه کلی بین منبع f یک سیستم تشعشع‌کننده و میدان g را که روی کره تشعشع ایجاد می‌کند، می‌توان بطور نمادی بصورت زیر نوشت [۹۸]:

$$Tf=g \quad (۸۸)$$

در اینجا T یک کارگردان خطی است. منبع را بصورت یک مجموعه توابع پایه e_n بسط می‌دهیم.

$$f=\sum_{n=1}^{N} f_n e_n \quad (۸۹)$$

در اینجا f_n ثابتهائی هستند که بصورت یک بردار با مولفه‌های f_n نوشته می‌شود.

$$f=\left[f_n\right] \quad (۹۰)$$

برای مثال، اگر منبع آرایه‌ای از دو قطبها باشد، f_n می‌تواند جریان یا ولتاژ دهانه‌های ورودی‌اش باشد. معادله (۸۹) را در معادله (۸۸) قرار می‌دهیم و معادله را در تعداد M نقطه (θ_m, ϕ_m) برای m=1,2,3,...,M روی کره تشعشع محاسبه می‌کنیم. نتیجه را می‌توان بصورت معادله ماتریسی زیر بنویسیم:

$$[T]f=g \quad (۹۱)$$

در اینجا g بعنوان بردار و [T] بعنوان ماتریس زیر تعریف می‌شود:

$$g=\left[g_m\right]$$
$$[T]=\left[(Te_n)_m\right] \quad (۹۲)$$

g_m اندازه g را در نقطه (θ_m, ϕ_m) و $(Te_n)_m$ پرتو را در

نقطه (θ_m, ϕ_m) نمایش می‌دهیم. حال، مسئله سنتز را می‌توان بصورت زیر بیان کرد:

$$[T]f \approx g_0 \tag{۹۳}$$

که در آن g_0 بردار پرتو مشخص شده است. این معادله خطی را می‌توان توسط روش عددی کمترین مربعات سابق‌الذکر حل کرد.

در هر حال، در فضاهای اقلیدسی، ضرب داخلی زیر را تعریف می‌کنیم.

$$< f_i^*, f_j >= \tilde{f}_i^*[V]f_j \tag{۹٤}$$

در اینجا ~ ترانهاده و * مزدوج مختلط را نمایش می‌دهد و [V] ماتریس وزنی بوده که مثبت معین است و در اینجا آن را یک ماتریس قطری فرض می‌کنیم.

$$[V] = [diag V_n] \tag{۹۵}$$

کلیه $V_n > 0$است. در فضای منبع، "نرم" ناشی از ضرب داخلی برابر است با

$$\|f\| = < f^*, f >^{1/2} = \left(\sum_{n=1}^{N} V_n |f_n|^2\right)^{1/2} \tag{۹٦}$$

در اینجا f_n مولفه‌های f هستند. "متریک" ناشی از "نرم" برابر $d(f_i, f_j) = \|f_i - f_j\|$ است. برای کمیات میدانی، ضرب داخلی را تعریف می‌کنیم.

$$< g_i, g_j >= \tilde{g}_i^*[W]g_j \tag{۹۷}$$

در اینجا [W] یک ماتریس وزنی است، که باید مثبت معین باشد و در اینجا آن را قطری فرض می‌کنیم.

$$[W] = [diag W_m] \tag{۹۸}$$

کلیه $W_m > 0$است. در فضای میدانی، نرم از ضرب داخلی ناشی می‌شود:

$$\|g\| = < g^*, g >^{1/2} = \left(\sum_{m=1}^{M} W_m |g_m|^2\right)^{1/2} \tag{۹۹}$$

در اینجا g_m مولفه‌های بردار g است. "متریک" ناشی از "نرم" برابر $d(g_i, g_j) = \|g_i - g_j\|$ است. برای مقایسه روشهای مختلف سنتز پرتو، دو عدد شایستگی را تعریف می‌کنیم. اولین عدد شایستگی، خطای سنتز بهنجار شده است.

$$E = \frac{\|g - g_0\|^2}{\|g_0\|^2} = \frac{\sum_{m=1}^{M} W_m |g_m g_{om}|^2}{\sum_{m=1}^{M} W_m |g_{om}|^2} \tag{۱۰۰}$$

در اینجا g پرتو سنتز شده و g_o پرتو مطلوب است. دومین عدد شایستگی، ضریب کیفیت است.

$$Q = M \frac{\|f\|^2}{\|g\|^2} = M \frac{\sum_{n=1}^{N} V_n |f_n|^2}{\sum_{m=1}^{M} W_m |g_m|^2} \tag{۱۰۱}$$

در اینجا M باعث می‌شود که Q نسبتا غیرحساس به تعداد نقاط میدان باشد. معمولترین روش سنتز شامل مشخص کردن هم دامنه و هم فاز پرتو میدان است. در روش حاضر، دامنه و فاز g_o در تعداد M نقطه روی کره تشعشع مشخص می‌شود. بنابراین، نقطه شروع معادله (۹۳) با g_o معلوم است. کمینه‌سازی تابع خطا $\varepsilon = \|[T]f - g_o\|^2$ منجر به جواب زیر می‌شود:

$$f = \left[\tilde{T}^* W T\right]^{-1}\left[\tilde{T}^* W\right] g_o \tag{۱۰۲}$$

برای مثال، معادلات را به منابع نقطه‌ای با توزیع اختیاری در یک صفحه و به پرتوهای تشعشعی در همین صفحه تخصیص می‌دهیم. منابع نقطه‌ای در موقعیتهای (x_n, y_n) با تحریکهای f_n قرار دارد. پرتو تشعشعی در زاویه ϕ عبارتست از:

$$Tf = \sum_{n=1}^{N} f_n e^{jk(x_n \cos\phi + y_n \sin\phi)} \tag{۱۰۳}$$

در اینجا $k = 2\pi/\lambda$ عدد موج است. با انتخاب پرتو مطلوب $g_n(\phi)$ و محاسبه $Tf \approx g_o$ در تعداد M نقطه ϕ_m، معادله $[T]f \approx g_o$ را تشکیل می‌دهیم. در اینجا f بردار ستونی مولفه‌های f_n، g_o بردار ستونی $g_o(\phi_m)$ و [T] ماتریس با درآیه‌های زیر است:

$$T_{mn} = e^{jk(x_n \cos\phi_m + y_n \sin\phi_m)} \tag{۱۰٤}$$

برای سادگی، ضرب داخلی وزن نشده (با ماتریس [W] برابر ماتریس یکه) را اختیار می‌کنیم. پاسخ برای منابع f_n، توسط معادله (۱۰۲) به دست می‌آید. این جواب تا حدی صادق است که M به اندازه کافی بزرگ باشد که حداقل تعداد N معادله مستقل برای تعداد N مجهول f_n به دست دهد. بعضی مثالها در مرجع [۹۸] داده شده است.

حال، مسئله سنتز پرتو بر حسب تنها دامنه‌ها را در نظر می‌گیریم. فرض کنید که $h=|g_o|$ دامنه میدان مطلوب باشد و بردار h را با مشخص کردن اندازه‌اش h_m در تعداد M نقطه روی کره تشعشع می‌سازیم. مجددا منبع را گسسته می‌سازیم و آن را توسط بردار f نمایش می‌دهیم. می‌خواهیم منبع f را تعیین کنیم، بطوری که تابع خطای پرتو زیر را کمینه سازد:

$$\varepsilon = \|[T]f - h\|^2 \quad (۱۰۵)$$

که بر حسب مولفه‌هایش عبارتست از:

$$\varepsilon = \sum_{m=1}^{M} W_m \left\| \sum_{n=1}^{N} f_n T_{mn} \right| - h_m \Big|^2 \quad (۱۰۶)$$

در اینجا W_m ضرایب وزنی هستند. برای تسهیل در عملیات جبری، تابع خطای کلیتر زیر را در نظر می‌گیریم:

$$\varepsilon(f,\beta) = \sum_{m=1}^{M} W_m \left| \sum_{n=1}^{N} f_n T_{mn} - h_m e^{j\beta_m} \right|^2 \quad (۱۰۷)$$

هنگامی که پرتو توسط دامنه h_m و فاز β_m مشخص می‌شود، این تابع خطا به کار می‌رود. بنابراین، اگر β_m ثابت باشد، f_n برای حداقل اندازه توسط معادله (۱۰۲) به دست می‌آید. اگر f_n ثابت باشد، هنگامی حداقل ε به دست می‌آید که هر دو جمله داخل علامت قدر مطلق (دامنه) در معادله (۱۰۷) هم فاز باشند. یعنی:

$$e^{j\beta_m} = \frac{\sum_{n=1}^{N} f_n T_{mn}}{\left| \sum_{n=1}^{N} f_n T_{mn} \right|^2} \quad (۱۰۸)$$

یک روش تکراری برای کمینه‌سازی معادله (۱۰۷) بطریق زیر است [۸۶]:

۱- مقادیر اولیه‌ای را برای $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_m$ فرض کنید.

۲- اندازه‌های β_m را ثابت قرار دهید و مقادیر f_n که ε را کمینه می‌سازد، با استفاده از معادله (۱۰۲) محاسبه کنید.

۳- مقادیر f_n را ثابت قرار دهید و اندازه‌های β_m که ε را کمینه می‌سازد، با استفاده از معادله (۱۰۸) محاسبه کنید.

۴- به گام ۲ باز گردید.

بعضی مثالها در مرجع [۸۶] همراه با بحث مفصلتری ارائه شده است.

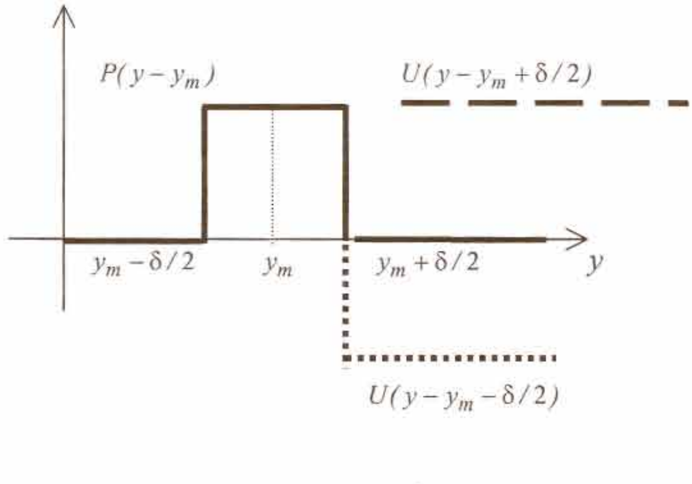
روش عددی کمترین مربعات برای مسائل پراکندگی نیز به کار رفته است [۹۱-۹۸]. مسائل دیگری نیز با این روش تحلیل شده است [۹۹-۱۰۱].

۱۲- نتیجه

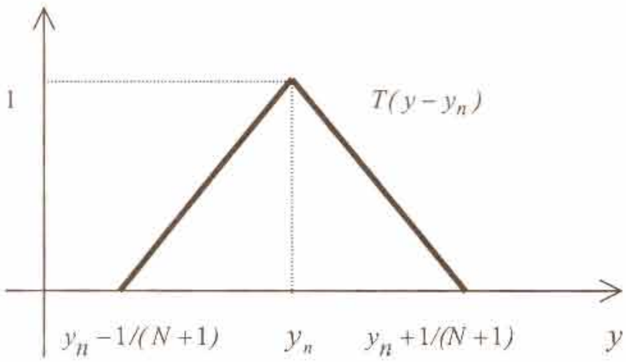
در این مقاله روش عددی کمترین مربعات (MLS) برای تحلیل و طراحی بعضی از مسائل ریاضی و مهندسی علی‌الخصوص مسائل مهندسی الکترومغناطیس ارائه شد. ابتداء، روشهای کلاسیک تعیین ضرایب فوریه و برازش یک منحنی به داده‌های اندازه‌گیری بر مبنای کمینه‌سازی یک تابع خطای کمترین مربعات به عنوان مقدمه بحث ارائه شد. سپس، حل معادلات مانند چند جمله‌ایها، معادلات متعالی، چند معادله خطی یا غیر خطی چند مجهولی توسط روش کمترین مربعات شرح داده شد. حل معادلات انتگرالی و دیفرانسیلی توسط روش MLS نیز ارائه شد. روشهای دیگری نیز مانند روش ممان (MOM) برای حل معادلات انتگرالی مانند معادلات هالن و پاکلینگتون برای آنتنهای سیمی تدوین شده و بطور مؤثری به کار رفته است. برای یک مقایسه جامع بین روشهای MLS و MOM برای حل معادلات هالن و پاکلینگتون خواننده علاقمند به مرجع [۸۳] ارجاع داده می‌شود. مزایا و معایب روش MLS به تفصیل در آنجا ارائه شده است و برای جلوگیری از اطاله کلام از ذکر آن در این

مقاله صرفنظر می‌شود. تنها اشاره می‌کنیم که عدد وضعیت ماتریسهای روش MLS از روش MOM بدتر است ولی همگرائی روش MLS نسبت به روش MOM استحکام بیشتری دارد. سپس مسائل الکتریسیته ساکن از طریق حل معادلات خطی (مانند معادله لاپلاس در محیط خطی و همگن) تحت شرایط مرزی توسط MLS تحلیل شد. روش باقیمانده مرزی کمترین مربعات برای تحلیل پیوندگاه موجبرهای استوانه‌ای شرح داده شد. تحلیل مسائل دیگر مانند نوار فلزی صفحه E و نوار فلزی روی ورق دی‌الکتریک صفحه E در موجبر مستطیلی نیز در مراجع [۵۲-۵۳] انجام شده است. طراحی مبدلهای امپدانس و پیوننده چند سوراخه به اختصار در این مقاله شرح داده شد. پیوننده‌های خط پیونیده [۶۸-۶۹]، خط شاخه‌ای و حلقوی [۶۷] نیز در مراجع ارائه شده است. بالاخره، یک روش سنتز پرتو آنتن برمبنای MLS ارائه شد.

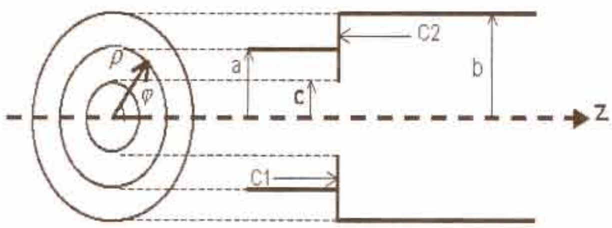
در این مقاله عمدتا روش ساخت تابع خطا برای تحلیل و طراحی مسائل مختلف الکترومغناطیس ارائه شد. برای شرح کامل هر یک از مسائل و جزئیات کمینه‌سازی تابع خطا و تحلیل نتایج، خواننده به مراجع ارجاع داده می‌شوند. بنابراین، مشاهده می‌شود که روش کمترین مربعات می‌تواند به سادگی برای تحلیل و طراحی مسائل مختلف مهندسی الکترومغناطیس به کار رود.

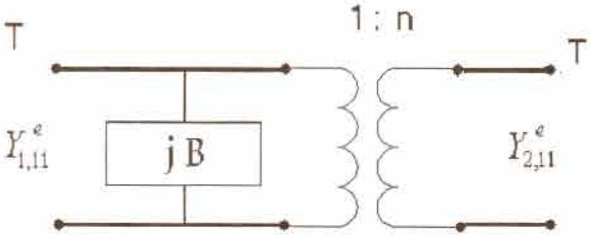


شکل ۱ تابع پایه پالس

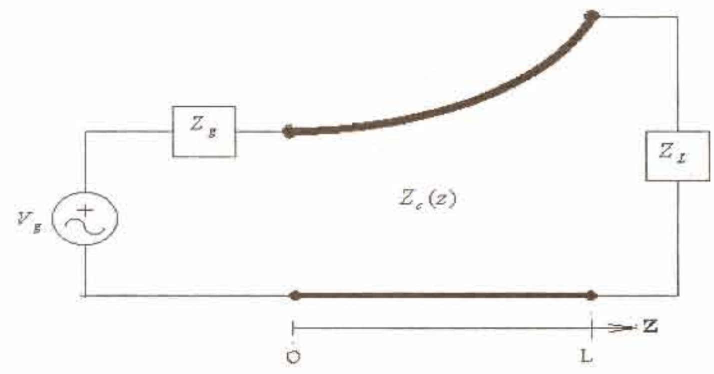


شکل ۲ تابع پایه مثلثی

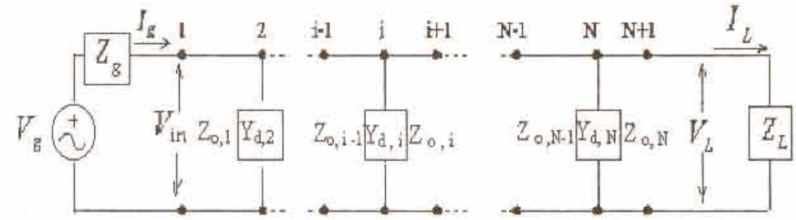




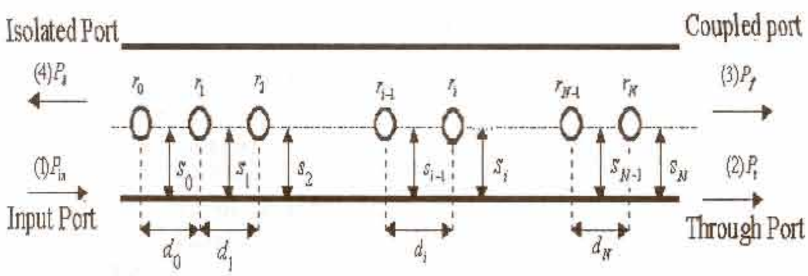
شکل ۳ پیوندگاه دو موجبر استوانه‌ای با سطح مقطع اختیاری (الف) پیوندگاه دو موجبر استوانه‌ای دایروی، (ب) مدار معادل پیوندگاه



شکل ٤ خط انتقال باریک شونده به عنوان یک مبدل امپدانس



شکل ٥ مبدل امپدانس خط پله‌ای



شکل ٦ نمای فوقانی یا جانبی یک پیوننده جهتی چند سوراخه موجبر مستطیلی.

۱۳- مراجع

مراجع کلی

[1] D. E. Smith, *History of Mathemtics*. Vol.1, Boston: Ginn and Company, 1923

[2] D. A. Pierre, *Optimization Theory with Applications*. New York: John Wiley & Sons, 1969.

[3] J. Kwalik and M. R. Osborn, *Methods of Unconstrained Optimization*. New York: John Wiley & Sons, 1969.

[4] S. Nakamura. *Applied Numerical Methods with Software*. NewYork: Prentice Hall International, 1991.

[5] J. H. Mathews, *Numerical Methods for Computer Science, Engineering and Mathematics*. Englewood Cliffs, NJ: Prentice- Hall, 1987.

[6] L. W. Johnson and R. D. R. Riess, *Numerical Analysis*, 2nd Ed. Reading, MA: Addison-Wesley, 1982.

[7] P. Henrici, *Elements of Numerical Analysis*. New York: John Wiley & Sons, 1964.

[8] R. F. Harrington, *Field Computation by Moment Methods*. New York: The Macmillan Company, 1968.

[9] J. J. H. Wang, *Generalized Moment Methods in Electromagnetics*. New York: John Wiley & Sons, 1991.

[10] T. Itoh, ed., Numerical Techniques for Microwave and Millimeter- Wave Passive Structures. New York: John Wiley & Sons, 1989.

[11] R. C. Booton, Jr., *Computational Methods for Electromagnetics and Microwaves*. New York: John Wiley & Sons, 1992.

[12] E. K. Miller, L. Medgyesi – Mitschang and E. H. Newman, eds., *Computatoinal Electromagnetics, Frequency- Domain Method of Moments*. New York: IEEE Press, 1992.

[13] R. E. Collin, Foundations for Microwave Engineering, 2nd ed.. NewYork: McGraw- Hill Book Co., 1990.

[14] O. P. Gandhi, *Microwave Engineering and Applications*. New York: Pergamon Press, 1981.

[15] D. M. Pozar, *Microwave Engineering*. 2nd ed. Reading, MA: Addison Wesley, 1998.

[16] A. F. Peterson, S. L. Ray and R. Mittra, *Computational Methods for Electromagnetics*. New York: IEEE Press, 1998.

[17] R.F. Harrington, *Time- Harmonic Electromagnetic Fields*. New York: McGraw- Hill, 1961.

[18] C.A. Balanis, *Advanced Engineering Electromagnetics*. New York: John Wiley & Sons, 1989.

[19] W. L. Stutzman and G. A. Thiele, *Antenna Analysis and Design*, 2nd ed. New York: Wiley, 1998.

[20] T. K. Sarkar, ed., *Application of Conjugate Gradient Method to Electromagnetics and Signal Analysis*. New York: Elsevier 1991.

[21] M. Becker, *The Principles and Applications of Variational Methods*. Cambridge, MA: MIT Press, 1964.

[22] B. A. Findlaysen, *The Method of Weighted Residuals and Variational Principles*. New York: Academic, 1972.

[23] R. Mittra, ed., *Computer Techniques for Electromagnetics*. New York: Pergamon, 1973.

[24] R. Mittra, ed., *Numerical and Asymptotic Techniques in Electromagnetics*. New York: Springer, 1975.

[25] I. Stakgold, *Green's Functions and Boundary Value Problems*. New York: Wiley, 1979.

حل معادلات

[26] H. Oraizi, "Solution of equations by the method of least squares," *Iran University of Science and Technology*, Vol. 5, No. 2a, Fall 1994, PP 23-45.

[27] H. Chen, "A special least squares method for curve fitting", *Proc. 1992 Int'l Conf. Power Electronics and Motion Cont.* 9-13, Nov, 1992, Vol. 3,PP. 358- 363.

[28] J. R. Popovic and J. W. Bandler, "A special program for least pth approximation including interpolation", *IEEE Trans. Microwave Theory Tech.*, Vol. MTT-22, No. 1, P.76, Jan. 1974.

[29] J. R. Popovic and J. W. Bandler, "A general program for discrete least pth approximation", *IEEE Trans. Microwave Theory Tech.*, Vol. MTT-22. No. 1, PP 76-77, Jan. 1974.

مسائل الکتریسیته ساکن

[30] T. K. Sarkar and S. M. Rao. "An iterative method for solving electrostatic problems," *IEEE Trans. Antennas Propagat.*, Vol. AP-30, PP 611-616, 1982.

[31] S. Jovicevic and L. Stanlovic, "The least squares boundary residual method in electrostatic and eddy current problems", *IEEE Trans. Magnetics*, Vol. M- 26, No. 2, PP 1117-1122, March 1990.

[32] V. V. Sanjaynath, N. Balakrishnan, and G. R. Nagabhushana, "Application of conjugate gradient method for static problems involving conductors of arbitrary shape," *IEEE Trans. Antennas Propagat.* Vol. AP-42, No. 7, PP 1028-1033, July 1994.

موجبرها

[33] F. L. Ng, "Tabulation of methods for the numerical solution of the hollow waveguide

problem," *IEEE Trans. Microwave Theory Tech.*, Vol. MTT-22, No. 3, PP 322-329, March 1974.

[34] H. Oraizi, *A Numerical Method for the Solution of Waveguide Discontinuities*, Ph. D. Dissertation, Technical Report TR-73-8, Syracuse University, Syracuse, NY, August 1973.

[35] H. Oraizi and J. Perini, "A numerical method for the solution of the junction of cylindrical waveguides," *IEEE Trans. Microwave Theory Tech.*, Vol. MTT-21, PP 640-2, Oct. 1973.

[36] H. Oraizi, and J. Perini, "A numerical method for the solution of junction of cylindrical waveguides," *IEEE G-MTT International Microwave Symposium*, June 4-5, 1973, University of Colorado, Boulder, Colorado, U.S.A.

[37] J. B. Davies, "A least square boundary residual method for the numerical solution of scattering problems", *IEEE Trans. Microwave Theory Tech.*, Vol. MTT-21, PP 99-104, Feb. 1973.

[38] H. Larviere and J. B. Davies, "The solution of electromagnetic eigen-value problems by least squares boundary residuals", *IEEE Trans. Microwave Theory Tech.*, Vol. MTT-23, PP 436-44, May 1975.

[39] R. Jansen, "On the performance of the least squares method for waveguide junctions and discontinuities," *IEEE Trans. Microwave Theory Tech.*, Vol. MTT-23, PP 436-441, May 1975.

[40] H. Oraizi, "Mode matching in the microwave discontimuity problems by the method of least squares", *Journal of the Faculty of Engineering*, University of Tehran, No. 30, PP 16-33, January 1975.

[41] H. Oraizi, "Solution of the Junction of TE11 - Mode circular waveguides by the least squares method", *Progress in Electromagnetics Research Symposium*. (PIERS), Nantes, France, 13-17 July, 1998.

[42] H. Oraizi, "Least square solution for the junction of TE11 – mode circular waveguides", *Proc. Sixth Iranian Conference on Electrical Engineering*. 12-14 May, 1998, Kh. N. Toosi Univ. of Tech., PP 149-155.

[43] F. A. Fernandez and J. B. Davies, "Least squares boundary residuals solution of microstrip discontinuitis", *Electronics Letters*, Vol. 12, No. 10, PP 640-1, 12 May, 1988.

[44] H. Oraizi, "Solution of the junction of TE11 – mode circular waveguides by the method of least squares", (to be published) *International Journal of Engineering Science*, Iran University of Science & Technology.

[45] S.P. Yeo."Dielectric-loaded elliptical waveguide", *Electronics Letters*, Vol. 27, No. 23, PP 2185-2187, 7 Nov., 1991.

[46] S. P. Yeo, "Application of least- squares boundary residual method to the analysis of a circular waveguide loaded with non-concentric dielectric rod," *IEEE Trans. Microwave Thoery Tech.*, Vol MTT 38, No. 8, PP 1092-1095, Aug. 1990.

[47] L. Stankovic and S. Jovicevic, "Boundry condition expansion of basis functions method implemented by fast fourier transform algorithm," *IEEE Trans. Microwave Theory Tech.*, Vol. MTT-38, No.3, PP 296-301, March 1990.

[48] M. L. Riabi, M. Ahmadpanah, H. Benzina, H. Baudrand and V. Fouad Hanna, "Performance of the LSBRM using efficient weighting functions for planar structures", *IEE. Proc. Microwaves, Antennas and Propagat.*, Vol. 142, No. 4, PP 364-368, Aug. 1995.

[49] W. Schroeder and I. Wolf. "The origin of spurious modes in numercial solutions of electromagnetic field eigenvalue problems," *IEEE Trans. Microwave Theory Tech.*, Vol. MTT-42, No.4, PP 644-653, April 1994.

[50] M. Ghomi, S. Pujol and H. Baudrand, "Full-wave analysis of microstrip patch antenna by a modified least- squares boundary residuals method," *IEEE Antennas Propagat. Soc. Int'l Symp.*, 18-23 June 1995, AP-S Digest, Vol. 2, PP 964-967.

[51] H. Baudrand, M. Boussouis and J. L. Amalric, "Analysis of some planar structures by the least-squares boundary residual method." *IEEE Trans. Microwave Theory Tech.*, Vol. MTT-34, PP 298-301, Feb. 1986.

[52] H. Oraizi and T. Pakizeh, "Analysis of the E-Plane metal strip on a dielectric slab in rectangular waveguides," *Proceedings of the Canadian Conference on Electrical & Computer Engineering*, CCECE'02, May 12 to 15, 2002, Winnipeg, Manitoba, Canada.

[53] H. Oraizi and T. Pakizeh, "Analysis of E- plane strips in rectangular waveguides," *Proceedings of the Mediterranean Microwave Symposiam*, 2002, MMS 2002, Caceres, Spain, June 26-28, 2002, PP CP-43 to CP- 46.

[54] H. Oraizi and R. Khalili, "Analysis of the junction of cylindrical waveguides with arbitray cross-section by MLS," *International Journal of Engineering Science*, Vol. 12, No. 4, Winter 2002, PP 131-147.

تبدیل و تطبیق امپدانس

[55] L. M. M. Anderson, B. A. Mair, M. Rao and C. H. Wu, "A weighted least squares method for PET", *IEEE Nuclear Sci. Symp. And Medical Imaging*

Conf., 21-28 Oct. 1995, Vol. 2, PP 1292-1296.

[56] H. Oraizi and J. Perini, "Nonuniform transmission line synthesis by least squares," *Proc. of First Iranian Congress of Electrical and Electronics Engineering,* Shiraz University, 12-16 May 1974.

[57] H. Oraizi and J. Perini, "Nonuniform transmission line synthesis by least spuares," *Iranian Journal of Science and Technology,* Shiraz University, Vol. 5, PP 131-141, May 1976.

[58] H. Oraizi, "Design of impedance transformers by the method of least squares," *Proc. Third Iranian Conference on Electrical Engineering,* 15 to 18 May 1995, (Volume on Communications), Iran Univ. of Sci. & Tech., Tehran, Iran.

[59] H. Oraizi, "Design of impedance transformers by the method of least squares," *IEEE Trans. Microwave Theory Tech.*, Vol. MTT-44, March 1996, PP 389-399.

[60] H. Oraizi, "Complex impedance stepline transformer design by the method of least squares", *Proc. Fourth Iranian Conference on Electrical Engineering,* 13-16 May 1996, (Volume on Communications), Faculty of Engineering. University of Tehran, PP 190- 197.

[61] H. Oraizi, "Opitmum Design of stepline transformers of arbitrary length including step discontinuities", *Iranian Journal of Science and Technology,* Transaction B, Shiraz University, Iran Vol. 25, No.1, 2001 PP, 1-14.

[62] H. Oraizi and E. Taghaddosi, "Design, construction and testing of microstrip impedance transformers by the method of least squares", *Proc. Eigth Iranian Conference on Electrical Engineering,* 17-19 May 2000, Isfahan University of Technology, Isfahan, (Volume on Communications), PP 104-115.

پیوندههای جهتی

[63] H. Oraizi, "Optimum design of multihole directional couplers with arbitrary aperture spacing", *Proc. Fifth Iranian Conference on Electrical Engineering,* 7-9 May 1997, (Volume on Communications), Sharif University of Technology, Tehran, PP 256-262.

[64] H. Oraizi, "Optimun design of multihole directional couplers with arbitrary aperture spacing," *IEEE Trans. Microwave Theory Tech.*, Vol. MTT-46, PP 331-342, April 1998.

[65] M. Rajarajan, B. M. A. Rahman and K. T. V. Grattan, "Numerical study of spot-size expanders for an efficient OEIC to SMF coupling," *IEEE Photonics Technology Letters,* Vol. 10, No. 8, PP 1082-1084, Aug. 1998.

[66] M. Rajarajan, B. M. A. Rahman and K. T. V. Grattan, "A rigorous comparison of the performance of directional couplers with multimode interference devices", *Journal of Lightwave Technology*, Vol. 17, No. 2, PP 243-248, Feb. 1999.

[67] H. Oraizi and M. Bakhshandeh, "Optimum Design of Microstrip Ring Couplers with Arbitrary Power Division and Impedence Matching, *Proceedings of the Mediterranean Microwave Symposium,* MMS 2002, Caceres, Spain, June 26-28, 2002, PP, CP: 205 CP: 208.

[68] H. Oraizi and G. R. Gabaranzad- Ghadim, "Optimum Design of Broadband Multi- Section Coupled- Line Couplers with Arbitrary Coupling and Impedance Matching," (to be Published), *Institute of Electrical, Information and Communication Engineers*, (IEICE) Transactions, Japan.

[69] H. Oraizi and Gh. R. Gabaranzad- Ghadim, "Optimum Design of Broadband Multisection Coupled – Line Couplers With Real Impedance Matching," (to be Published), *International Journal of Engineering Science,* Iran University of Science and Technology.

تشعشع از آنتنها

[70] D. R. Rhodes, "The optimum line source for the best mean square approximation to a given radiation pattern," *IEEE Trans. Antennas and Propagat.*, Vol. AP-11, PP 440-446, July 1963.

[71] A. N. Tihonov, "Solution of incorrectly formulated problems and the regularization method," *Sov. Math.*, Vol. 4, PP 1034-1038, July-Dec. 1963.

[72] D. R. Rhodes, "On an optimum line source for maximum directivity, " *IEEE Trans. Antennas Propagat.*, Vol. AP-19. PP 485-492, July 1971.

[73] M. Zuhair Nashed, "Operator- theoretic and computational approaches to ill-posed problems with applications to antenna problems, " *IEEE Trans. Antennas Propagat.*, Vol. AP-29, No. 2, PP 220-231, March 1981.

[74] T. K. Sarkar, "A note on variational method (Rayleigh- Ritz), Galerkin's method and the method of least squares," *Radio Sci.*, Vol. 18, PP 1207-1224, No.- Dec. 1983.

[75] H. Oraizi and Sh. Jam. "Optimum design of the tapered slot antenna based on simulation by the method of least squares," *Proc. Eight Iranian Conference on Electrical Engineering*, 17-19 May 2000, Isfahan University of Technology, Isfahan, (Volume on Communications), PP 26-33.

[76] Sh. Jam and H. Oraizi, "Optimization of tapered slot antenna profile by the method of least

squares." *Millenium Conference on Antennas & Propagat.* Ap 2000 Davos, Switzerland, 9-14 April 2000.

[77] B. M. Kolundzija, "A new gerneral method for numerical solution of linear integral equations in numerical electromagnetics," *Int'l Conf. Computation in Electromagntics*, 1991, PP 226-229.

[78] Weng Cho Chew, and Cai-Cheng Lu, "A multilevel NlogN algorithm for solving boundary integral equation", *IEEE Antennas Propagat. Soc Int'l Symp.,* 20-24 June 1994, AP-S Digest, Vol. 1, PP 431-434.

[79] H. Oraizi and E. Mokhatab, "Analyzing a Dipole Antenna Using Matrix Form of MLS," *Proceedings of the Mediterranean Microwave Sympusium, MMS 2002*, Caceres, Spain, June 26-28, 2002, PP: CP: 47 to CP: 50.

[80] H. Oraizi and E. Mokhatab, "Analyzing a Folded Dipole Antenna Using Matrix Form of MLS," *Proceedings of the Mediterranean Microwave Symposium,* MMS 2002, Caceres, Spain, June 26-28, 2002, PP: CP:51 to CP: 54.

[81] H. Oraizi and Sh. Jam, "Optimum Design of Tapered Slot Antenna Profile," (to be Published), *IEEE Transactions on Antenna and Propagat.*

[82] H. Oraizi and A. R. Hajhoseini- Mesgar, "Solution of Hallen and Pocklington Integral Equations for Cylindrical Antennas by the Method of Least Squares," *Progress in Electromagnetic Research Symposium (PIERS 2001)*, July 18-22, 2001, Osaka, Japan, P 528.

[83] H. Oraizi and A. R. Hajhoseini- Mesgar, "Solution of Hallen Integral Equation for Cylindrical Antennas by the Method of Least Squares," *The Ninth Iranian Conference on Electrical Engineering*, Power & Water Institute of Technology, May 8-10, 2001, Tehran, Iran, PP 33-1 to 33-10.

[84] Sh. Jam and H. Oraizi, "Analysis of Tapered Slot Antenna by the Method of Least Squares, " *The Ninth Iranian Conference on Electrical Engineering*, Power & Water Institute of Technology, May 8-10, 2001, Tehran, Iran, PP 31-1 to 31-10.

سنتز پرتو آنتن و آرایه‌ها

[85] J. Perini and M. Idselis. "Note on antenna pattern synthesis using numerical iterative methods", *IEEE Trans. Antennas Propagat.*, AP- Vol. 21, No 3, PP 284-286 March 1971.

[86] J. Perini and J. R. Stewart, "Solution of the scattering by wires and the conformal array pattern by optimization techniques," *22nd Annual Symposium USAF Antenna Research and Development Program*, University of Illinois, October 1972.

[87] Y. T. LO, S. W. Lee and Q. H. Lee, "Optimization of directivity and signal-to- noise ratio of an arbitrary antenna array, " *Proc. IEEE*, Vol. 54, PP 1033-1045, Aug. 1966.

[88] H. Steyskal, "Synthesis of antenna patterns with presctibed nulls," *IEEE Trans. Antennas Propagat.*, Vol. AP-30, No.3, PP 273-279, March 1982.

[89] M. F. Catedra, J. A. Alcaraz and J. C. Arredondo, "Analysis of arrays of Vivaldi and LTSA antennas," *IEEE Antennas Propagat. Soc. Int'l Symp.*, 26-30 June 1989, AP-S Digest, Vol.1, PP 122-125.

[90] Meng Hwa Er "Linear antenna array pattern synthesis with prescibed broad nulls, " *IEEE Trans. Antennnas Propagat.*, Vol. AP-28, No. 9, PP 1496-1498, Sept. 1990.

[91] Kai Liu and Wei Hong, "Analysis of patch arrays based on FDTD method, " *Proc. Asia Pacific Microwave Conf., APMC* 97, 2-5 Dec. 1997, Vol. 1, PP 265-268.

[92] L. I. Vanskelainen, "Iterative least-squares synthesis methods for conformal array antennas with optimized polarization and frequency properties, " *IEEE Trans. Antennas Propagat.*, Vol. AP-48, No. 7, PP 1179-1185, July 1997.

[93] B. Lindmark, S. Lundgren, J. R. Sanford, and C. Beckman, "Dual- polarized array for signal processing applications in wireless communications, " *IEEE Trans. Antennas Propagat.*, Vol. AP-46, No. 6, PP 758-763, June 1998.

[94] Yi Chu and Wen- Hsien Fang, "A novel wavelet-based generalized sidelobe canceller," *IEEE Trans. Antennas Propagat.* Vol. Ap-47, No.9, PP 1485-1494, Sept. 1999.

[95] Sh. J. Yu and J. H. Lee "Efficient eigenspace based array signal processing, using multiple shift- invariant subarrays ", *IEEE Trans. Antennas Propagat.*, Vol. AP-47, No.1, PP 186-194, Jan. 1999.

[96] H. An, B. Nauwelaers and A. Vande Capele, "A new approach of broadband microstrip antenna design," IEEE Antennas Propagat. Soc. Int'l Symp., URSI Radio Science and *IEEE Nuclear EMP Meetings*, 18-25 July 1992. AP-S Digest Vol.1, PP 475-478.

[97] G. A. Deschamps and H. S. Cabayan, "Antenna synthesis and solution of inverse problems by regularization methods, " *IEEE Trans. Antennas Propagat.*, Vol. AP-20, PP 268-274, May 1972.

[98] J. R. Mautz and R. F. Harrington, "Computational methods for antenna pattern synthesis", *IEEE*

Trans. Antennas Propagat., Vol. AP-23, No. 7, PP 507-512, July 1975.

[99] V.I. Popovkin and V.I. Yelumeyev, "Optimization and systematization of solutions to antenna synthesis problems," *Radio Eng. Electron. Phys.*, Vol. 13, No. 5, PP 682-686, 1968.

[100] V. I. Popovkin. G. I. Scherbakov and V. I. Yelumeyev, "Optimum solutions of problems in antenna synthesis theory", *Radio Eng. Electron. Phys.,* Vol. 14, No. 7, PP 1025-1030, 1969.

[101] L. D. Bakhrakh and V. I. Troytskiy, "Mixed problems of antenna synthesis," *Radio Eng. Electron. Phys.*, Vol. 12, PP 404-414, Mar. 1967.

[102] Y. I. Chomi, "Synthesis of an antenna according to a given amplitude radiation pattern," *Ridio Eng.* Electron. Phys., Vol. 16, PP 770-778, May 1971.

[103] O. M. Bucci, G, D'Elia, G. Mazzarella and G. Panariello, "Antenna Pattern synthesis: A new general approach," *Proc. IEEE*, Vol 82, No. 3, PP 356-371, March 1994.

پراکندگی

[104] M. Bertero and Ch. De Mol, "Stability problems in inverse diffraction," *IEEE Trans. Antennas Propagat.*, Vol. AP-29, No. 2, PP 368-372, March 1981.

[105] P. M. Van den Berg, "Iterative computational techniques in scattering based upon the integrated square error criterion", *IEEE Trans. Antennas Propagat.*, Vol. AP-32. PP 1063-1071, Oct. 1984.

[106] L. J. Stankovic and S. Jovicevic, "Modified least squares method with application to diffraction and eigenvalue problems," *IEE Proc. Microwaves, Antennas Propagat.,* Vol. Proc. H-135, No. 5, PP 339-343, Oct. 1988.

[107] K. Joo and M. F. Iskandar, "A new procedure of point mathing method for calculating the absorption and scattering of lossy dielectric objects," *IEEE Trans. Antennas Propagat.*, Vol. AP-38, No. 9. PP 1483-1490. Sept. 1990.

[108] D. J. Wingham and R. H. Devayya, "A note on the use of the Neumann expansion in calculating the scatter from rough surfaces," *IEEE Trans. Antennas Propagat.*, Vol. AP-40, No. 5, PP 560-563, May 1992.

[109] K. Sawaya, S. Yatabe and S. Adachi, "Exterior moment method analysis of conducting scatterers by using the interior Green's function and the method of least squares," *IEEE Trans. Antennas Propagat.,* Vol. AP-40, No. 5, PP 563-565, May 1992.

[110] B. G. Salman and A. McCowen, "A comparative study of the computation of near- field scattering from resonant dielectric/PEC scatterers, " *IEEE Trans. Magnetics.,* Vol. M-32, No. 3, PP 866-869, May 1996.

[111] Cai – Cheng Lu and Weng Choo Chew, "A near – resonance decoupling approach (NRDA) for scattering solution of near- resonant structures, " *IEEE Trans. Antennas Propagat.*, Vol. AP-45, No.12, PP 1857-1862, Dec. 1997.

[112] T. Morisue, T. Yajima, T. Kume and S. Fujimora, "Analysis of electromagnetic force for shaping the free surface of a molten metal in a cold crucible, " *IEEE Trans. Magnetics.,* Vol. M-29, No. 2, PP 1562-1565, March 1993.

[113] D. Vileneuve and J. P. Webb, "Accuracy versus cost for three efficient finite – element solvers, " *IEEE Trans. Magnetics.,* Vol. M-32, No. 3, PP 1385-1388, May 1996.

[114] H. Ismailoglu, O. Kalenderli and M. Ozkaya, "Determination of impulse breakdown voltage using least squares method," Conf. Electrical Insulation and Dielectric Phenomenon., *IEEE 1997 Annual Report*, 19-22 Oct. 1997, Vol. 1, PP 246-249.