

طراحی کنترل کننده H_∞ غیرخطی برای کنترل وضعیت ماهواره

محمد تقی حمیدی بهشتی^{۱*}، علی اهوزی^۲

۱- استادیار بخش مهندسی برق، دانشکده فنی و مهندسی، دانشگاه تربیت مدرس

۲- دانشجوی دکتری مهندسی برق دانشکده فنی و مهندسی دانشگاه تربیت مدرس

* تهران، صندوق پستی ۱۴۳-۱۴۱۱۵

mbehesht@modares.ac.ir

(دریافت مقاله: اردیبهشت ۱۳۸۷ پذیرش مقاله: مهر ۱۳۸۷)

چکیده- در این مقاله سعی بر آن است که با استفاده از مدلسازی به روش آشفته‌گی تکین، نوعی کنترل کننده H_∞ غیرخطی برای کنترل وضعیت ماهواره هنگام انجام مانور با زاویه دوران بزرگ، طراحی شود. ابتدا معادله دیفرانسیل بیان کننده دینامیک ماهواره توصیف شده و با انتخاب مدل دینامیکی مناسب برای دینامیک عملگرها، مدل استاندارد آشفته تکین سیستم حلقه بسته را استخراج می‌کنیم. سپس این مدل را به شکل مناسب برای حل مسأله H_∞ تبدیل کرده و آنگاه پاسخ معادله HJI و قانون کنترل مناسب را پیدا می‌کنیم. در انتها شبیه سازیایی را برای یک ماهواره نوعی ارائه خواهیم کرد.

کلیدواژگان: سیستم غیرخطی نظریه آشفته‌گی تکین نظریه کنترل H_∞ ، کنترل وضعیت.

۱- مقدمه

مسأله کنترل وضعیت^۱ در سیستمهای هوا-فضا کاربردهای عملی بسیاری دارد. ورود مجدد^۲ سرچنگی موشکهای بالستیک به جو، مانورهای گوناگونی که ماهواره برای دستیابی به وضعیت دورانی از پیش تعیین شده باید انجام دهد جهت گیری نسبت به زمین یا خورشید و جهت گیری اولیه برای انجام مانور مداری، همگی مثالهایی از کنترل وضعیت است. مسأله کنترل وضعیت تاکنون از دیدگاههای مختلف بررسی و کنترل کننده های متنوعی برای آن طراحی شده است [۱-۵].

مرجع [۱] به بحث کلی مسأله کنترل وضعیت پرداخته و طراحی کنترل کننده را به سه روش طراحی مستقل از

مدل طراحی وابسته به مدل و طراحی با استفاده از کنترل تطبیقی بیان کرده است و برای مدلسازی ماهواره از مدل جسم صلب غیرخطی استفاده می‌کند. در مرجع [۲] برای حل مسأله، از تئوری H_∞ خطی و با در نظر گرفتن مدل جسم صلب خطی استفاده شده است. مرجع [۳] برای حل این مسأله ایده گام به عقب^۳ را برگزیده است. نکته جالب در این مقاله آن است که برای تولید گشتاور، فقط از گشتاورسازهای مغناطیسی استفاده شده است. مرجع [۴] از پسخور کواترنیونی غیرخطی برای کنترل سیستم استفاده کرده است. اما در مرجع [۵] که بیشترین تأثیر را بر کار ما داشته، با تبدیل سیستم حلقه بسته به مدل استاندارد آشفته‌گی تکین و با استفاده از کنترل مد لغزشی^۴،

3. Back Stepping
4. Sliding Mode

1. Attitude Control
2. Re-Entry

می‌آوریم و آنگاه با مبنا قراردادن دینامیک کند (مدل کاهش مرتبه یافته) به عنوان معادله دینامیکی تقریبی بیانگر سیستم و با استفاده از نظریه کنترل H_∞ غیرخطی، کنترل‌کننده را برای آن طراحی کرده و در انتها با شبیه سازی قابل قبول بودن طراحی بر مبنای مدل تقریبی را با مقایسه خطاهای تولید شده با مقادیر مجاز خطا برای چند ماهواره واقعی نشان خواهیم داد.

۲- مدل دینامیکی ماهواره

مدلی که در این پروژه از آن استفاده شده مدل جسم صلب غیرخطی ماهواره است که با معادله دینامیکی زیر بیان می‌شود:

$$J\dot{\omega} + B(\omega)J\omega = u \quad (1)$$

در این معادله J ماتریس اینرسی ماهواره ω بردار سرعت زاویه‌ای در سه راستای گردش^۷، پیچش^۸ و چرخش^۹، u بردار گشتاور اعمالی و $B(\omega)$ ماتریسی پاد متقارن به صورت زیر است:

$$B(\omega) = \begin{pmatrix} 0 & -\omega_z & \omega_y \\ \omega_z & 0 & -\omega_x \\ -\omega_y & \omega_x & 0 \end{pmatrix}$$

اگر بردار $\dot{\omega}$ را از رابطه (۱) محاسبه کنیم به معادلات زیر می‌رسیم:

$$\dot{\omega}_x = \frac{J_y - J_z}{J_x} \omega_y \omega_z + \frac{1}{J_x} u_x \quad (2)$$

$$\dot{\omega}_y = \frac{J_z - J_x}{J_y} \omega_x \omega_z + \frac{1}{J_y} u_y$$

$$\dot{\omega}_z = \frac{J_x - J_y}{J_z} \omega_x \omega_y + \frac{1}{J_z} u_z$$

که به برای سهولت نگارش آن را به صورت زیر نمایش می‌دهیم:

$$\dot{\omega} = f(\omega) + g(\omega)u$$

کنترل‌کننده‌ای مقاوم برای ماهواره طراحی شده است. لازم است ذکر شود که در تمامی مراجع فوق از مدل جسم صلب غیرخطی استفاده شده است. در برخی مراجع دیگر به جای مدل جسم صلب از مدل‌های قابل ارتجاع^۱ برای مدل‌سازی ماهواره استفاده شده است. به عنوان مثال مرجع [۶] با استفاده از مدل قابل ارتجاع خطی و تئوری کنترل H_∞ خطی به بررسی مسأله پرداخته است. مراجع [۷، ۸]، نیز به ترتیب از روشهای غیر فعال بودن^۲، LQG و روشهای عددی استفاده کرده‌اند. نمونه‌ای از طراحی‌های انجام شده برای ماهواره‌های واقعی را در مرجع [۹] می‌توانید مشاهده کنید. در مراجع فوق می‌توان مشاهده کرد که در بیشتر کنترل‌کننده‌های پیشنهادی با ساختارهای ساده یا بعضاً پیچیده، ناحیه جذب^۳ بزرگی را برای سیستم حلقه بسته ایجاد نمی‌کنند. کوچک بودن ناحیه جذب موجب امکانپذیر نبودن مانورهای دورانی بزرگ و در نتیجه کاهش کارایی کنترل‌کننده می‌شود که طبیعتاً برای طراح امری نامطلوب به شمار می‌رود. بنابراین یافتن کنترل‌کننده‌ای با قابلیت مانورهای بزرگ که ضمن حفظ پایداری سیستم حلقه بسته دارای عکس العمل سریع در برابر اغتشاشات وارد شده به سیستم بوده و هرگز از ناحیه کار مجاز خود خارج نشود، امری مطلوب به شمار می‌رود.

در این مقاله برآنیم تا کنترل‌کننده‌ای را برای ماهواره‌ای فرضی طراحی نماییم. ابتدا مدل دینامیکی مورد استفاده را بیان و سپس مدل دینامیکی مناسبی برای کنترل‌کننده ارائه می‌کنیم. در ادامه با استفاده از شواهد فیزیکی و با استفاده از روش مدل‌سازی آشفتگی^۴ تکین^۵ مدل‌های کاهش مرتبه یافته^۶ و لایه مرزی^۶ را برای مجموعه مدل‌های دینامیکی سیستم و کنترل‌کننده (سیستم حلقه بسته) به دست

1. Flexible
2. Passivity
3. Domain of Attraction
4. Singular Perturbation Modeling
5. Reduced Order Model
6. Boundary Layer Model

7. Roll
8. Pitch
9. Yaw

$$\begin{bmatrix} \dot{\omega} \\ \dot{q} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f(\omega) \\ \frac{1}{2}Q(\omega)q \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} g(\omega) \\ 0 \end{bmatrix}u + \begin{bmatrix} g(\omega) \\ 0 \end{bmatrix}v \quad (6)$$

که در آن v نشان دهنده گشتاور اغتشاش است. اکنون تمام شرایط برای تعریف مسأله کنترل وضعیت به روش H_∞ غیرخطی فراهم است.

تعریف مسأله کنترل وضعیت ماهواره به روش کنترل H_∞ غیرخطی: برای ماهواره فرضی با داشتن اطلاعات لازم کنترل پسخور $u(\omega, q)$ را طوری به دست آورید که علاوه بر تضمین پایداری سیستم حلقه بسته سیستم را وادار به تعقیب مسیر مرجع از پیش تعیین شده کرده و اثر اغتشاشات گشتاوری را در خروجی از یک مقدار تعریف شده γ کوچکتر کند.

۳- به دست آوردن مدل استاندارد آشفته تکین

مسأله مدل سازی سیستمها همواره از مهمترین مباحث فراوری مهندسان بوده است. از یکسو طراح مایل است که مدل به دست آمده تا حد ممکن ساده باشد تا امکان طراحی کنترل کننده ساده تری را فراهم کند و از سوی دیگر باید مراقب باشد که ساده سازی بیش از حد مدل مورد بحث آن را غیر واقعی نکند.

ساده سازی مدل از مدتها پیش در بین مهندسان کنترل رایج بوده است و حتی قبل از اینکه مسأله ساده سازی به صورت تحلیلی مطرح شود با صرف نظر کردن از پارامترهای کوچک مانند ثابت زمانی جرم ظرفیت و امثال آن به کاهش مرتبه سیستم می پرداختند. البته باید در نظر داشت که طراحی بر اساس مدل ساده شده همواره قابل قبول نبوده و ممکن است معیارهای مورد نظر ما را برآورده نسازد. لذا استفاده از روش های ساده سازی که امکان تحقق اهداف کنترلی مورد نظر را فراهم کند امری ضروری به نظر می رسد.

علاوه بر این معادله به معادلات دیگری نیاز داریم که سینماتیک ماهواره را بیان کند. عموماً برای بیان سینماتیک جسم صلب از زوایای اوایلر^۱ استفاده می کنند اما استفاده از این زوایا به خصوص در مورد مانورهای بزرگ می تواند موجب بروز تکینگی^۲ در معادلات شود. لذا در این موارد معمولاً به جای زوایای اوایلر از کواترینین ها^۳ (پارامترهای اوایلر) استفاده می کنند. مطابق قضیه اوایلر، کلی ترین فرم دوران جسم صلب را می توان به صورت دوران جسم حول یک راستای ثابت و با اندازه مشخص بیان کرد. اگر راستای دوران را با بردار u_ϕ و مقدار دوران حول این راستا را با ϕ نمایش دهیم کواترینین ها به صورت زیر تعریف می شوند:

$$\begin{bmatrix} q_1 & q_2 & q_3 \end{bmatrix}^T = u_\phi \sin\left(\frac{\phi}{2}\right) \quad (3)$$

$$q_4 = \cos\left(\frac{\phi}{2}\right)$$

واضح است که این چهار پارامتر مستقل از یکدیگر نبوده و به طریق زیر به یکدیگر وابسته اند:

$$q_1^2 + q_2^2 + q_3^2 + q_4^2 = 1 \quad (4)$$

همچنین می توان نشان داد که معادله دیفرانسیل بیان کننده دینامیک کواترینین ها در هر لحظه از زمان به صورت زیر است:

$$\dot{q} = \frac{1}{2}Q(\omega)q \quad (5)$$

که در آن $Q(\omega)$ ماتریس پاد متقارن به صورت زیر است:

$$Q(\omega) = \begin{pmatrix} 0 & \omega_z & -\omega_y & \omega_x \\ -\omega_z & 0 & \omega_x & \omega_y \\ \omega_y & -\omega_x & 0 & \omega_z \\ -\omega_x & -\omega_y & -\omega_z & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} B^T(\omega) & \omega \\ -\omega^T & 0 \end{pmatrix}$$

بدین ترتیب معادلات دیفرانسیل بیان کننده سیستم از کنار هم گذاشتن معادلات (۲) و (۵) به دست می آید:

1. Euler Angles
2. Singularity
3. Quaternion

سرعت زاویه‌ای و حلقه خارجی برای کنترل وضعیت (کوترین‌ها).

در ادامه فرض کنید معادله دینامیکی عملگرها (مولدهای گشتاور) با رابطه زیر قابل بیان باشد:

$$\ddot{u} = \hat{h}(u, \omega, q)$$

می‌دانیم که در سیستم واقعی همواره عملگرها سریع‌تر از خود سیستم تحت کنترل رفتار می‌کنند لذا طبیعی است که اگر بخواهیم دو دینامیک تند و کند را برای سیستم حلقه بسته انتخاب کنیم، دینامیک ماهواره را به عنوان دینامیک کند و عملگر را به عنوان دینامیک تند در نظر بگیریم در نتیجه منطقی است که دینامیک عملگر را با معادله زیر بیان کنیم:

$$\varepsilon \dot{u} = h(u, \omega, q) \quad (V)$$

اکنون می‌توان مدل استاندارد آشفتگی تکین سیستم حلقه بسته را با کنار هم قرار دادن روابط (۶) و (۷) به دست آورد:

$$\begin{bmatrix} \dot{\omega} \\ \dot{q} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f(\omega) \\ \frac{1}{2}Q(\omega)q \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} g(\omega) \\ 0 \end{bmatrix} u + \begin{bmatrix} g(\omega) \\ 0 \end{bmatrix} v \quad (۸-الف)$$

$$\varepsilon \dot{u} = h(u, \omega, q) \quad (۸-ب)$$

و مدل کاهش مرتبه یافته نیز عبارت است از:

$$h(u, \omega, q) = 0 \rightarrow u = k(\omega, q) \rightarrow \quad (۹)$$

$$\begin{bmatrix} \dot{\omega} \\ \dot{q} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f(\omega) \\ \frac{1}{2}Q(\omega)q \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} g(\omega) \\ 0 \end{bmatrix} k(\omega, q) + \begin{bmatrix} g(\omega) \\ 0 \end{bmatrix} v$$

بنابراین از این به بعد هدف ما عبارت خواهد بود از پیدا کردن کنترل $k(\omega, q)$ به طوری که مسئله کاهش اثر اغتشاش را برای سیستم (۸) به طور تقریبی حل نماید. حال خانواده‌ای از عملگرها را که معادله دینامیکی آنها با عبارت کلی زیر بیان می‌شود در نظر بگیرید:

$$\varepsilon \dot{u} = k(\omega, q) - u \quad (۱)$$

شکل ۱ دیاگرام بلوکی سیستم حلقه بسته را که در آن از کنترل کننده (۱) استفاده شده، نشان می‌دهد:

مجموعه این عوامل نظریه پردازان کنترل را به استفاده از روش های ساده سازی مدل سیستم وادار کرده است که از آنها تحت عنوان کلی مدل سازی تقریبی^۱ یاد می‌شود. میان این روشها به روش مدل سازی آشفتگی تکین می‌توان اشاره کرد.

در این روش سیستم به دو مدل مختلف به نامهای مدل کاهش مرتبه یافته (مدل کند) و مدل لایه مرزی (مدل تند) تجزیه می‌شود. از مدل کاهش مرتبه یافته برای بررسی سیستم هنگامی که به حالت ماندگار رسیده، استفاده می‌شود اما در بررسی حالاتهای گذرای سیستم از مدل کامل سیستم (مجموع دو مدل فوق) استفاده می‌شود.

از آنجا که در بسیاری موارد بررسی رفتار حالت ماندگار سیستم مورد نظر است لذا پس از اطمینان از پایداری سیستم لایه مرزی طراحی کنترل کننده را بر اساس مدل کاهش مرتبه یافته انجام می‌دهیم. طبیعی است که رفتار سیستم اصلی و سیستم کاهش مرتبه یافته آن در حالت گذرا یکسان نیست اما می‌توان انتظار داشت که پس از عبور از حالت گذرا و رسیدن به حالت ماندگار، دو سیستم رفتار مشابهی را از خود نشان دهند.

قبل از اینکه به نحوه به دست آوردن مدل استاندارد آشفتگی تکین سیستم (۶) بپردازیم اجازه دهید بار دیگر نگاهی به این رابطه بیاندازیم. مهمترین نکته ای که در این معادلات وجود دارد عدم وابستگی مستقیم کوترین‌ها (خروجی های مد نظر ما) به ورودیهای گشتاور (ورودیهای کنترلی) است. در حقیقت سرعتهای زاویه‌ای توسط ورودیهای گشتاور قابل کنترل بوده و کوترین‌ها توسط سرعتهای زاویه‌ای کنترل می‌شوند. این نکته کار طراحی را مشکلتر می‌سازد زیرا فرمانهای کنترلی هیچ تأثیر مستقیمی بر خروجی‌ها ندارد. به بیان دیگر در این سیستم دو حلقه کنترلی داریم حلقه داخلی برای کنترل

دینامیک خطا را با کم کردن معادله (۱۲) از معادله (۹) می توان به دست آورد. برای این کار متغیرهای جدید زیر را تعریف می کنیم:

$$\tilde{\omega} = \omega - \omega_r, \quad \tilde{q} = q - q_r, \quad \tilde{u} = k(\omega, q) - u_r$$

بدین ترتیب دینامیک خطا مطابق رابطه زیر به دست می آید:

$$\begin{bmatrix} \dot{\tilde{\omega}} \\ \dot{\tilde{q}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f(\tilde{\omega}) + f_r(\tilde{\omega}, \omega_r) \\ \frac{1}{2}[Q(\tilde{\omega}) + Q(\omega_r)]\tilde{q} + \frac{1}{2}Q(\tilde{\omega})q_r \end{bmatrix} \quad (13)$$

$$+ \begin{bmatrix} g(\tilde{\omega}) \\ 0 \end{bmatrix} \tilde{u} + \begin{bmatrix} g(\tilde{\omega}) \\ 0 \end{bmatrix} v$$

که در این رابطه f_r تابعی برداری و برابر است با:

$$f_r(\tilde{\omega}, \omega_r) = \begin{bmatrix} \frac{J_y - J_z}{J_x}(\omega_{y_r} \tilde{\omega}_z + \omega_{z_r} \tilde{\omega}_y) \\ \frac{J_z - J_x}{J_y}(\omega_{x_r} \tilde{\omega}_z + \omega_{z_r} \tilde{\omega}_x) \\ \frac{J_x - J_y}{J_z}(\omega_{y_r} \tilde{\omega}_x + \omega_{x_r} \tilde{\omega}_y) \end{bmatrix}$$

تابع خروجی z را به صورت زیر تعریف می کنیم:

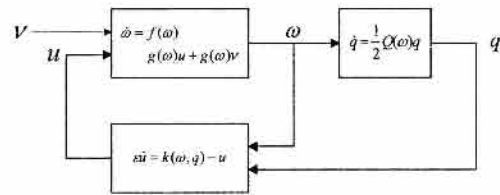
$$z = [\alpha_1 \ \alpha_2 \ \alpha_3 \ 0 \ 0 \ 0] \cdot \begin{bmatrix} \tilde{\omega}_x \\ \tilde{\omega}_y \\ \tilde{\omega}_z \\ \tilde{q}_1 \\ \tilde{q}_2 \\ \tilde{q}_3 \end{bmatrix}, \quad \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \leq 0 \quad (14)$$

توجه کنید که انتخاب این تابع برای خروجی تحت کنترل معقول است زیرا گرچه هدف نهایی ما کنترل وضعیت (کوترین ها) می باشد اما همانطور که پیشتر ذکر شد بین کوترین ها و ورودی کنترل رابطه مستقیمی وجود ندارد، بلکه کوترین ها را باید به وسیله سرعت های زاویه ای کنترل کرد. لذا عاقلانه است که اثر اغتشاش و سایر عوامل مزاحم را روی سرعت های زاویه ای حداقل کنیم.

معادله (۱۴) را با استفاده از تقریب زیر تا حدی می توان ساده تر کرد:

$$\tilde{u} = \tilde{u} + g^{-1}(\tilde{\omega}) f_r(\omega_r, \tilde{\omega})$$

در نتیجه این رابطه به شکل زیر درمی آید:



شکل ۱ دیاگرام بلوکی سیستم کنترل وضعیت

اما در این میان پرسشی مطرح می شود که باید پاسخ مناسبی برای آن یافت و آن این است که ما با حل مسئله H_∞ تابع $k(\omega, q)$ را پیدا می کنیم اما چگونه با داشتن k می توان $h(u, \omega, q)$ را پیدا کرد؟ در پاسخ باید گفت که هیچ روشی برای پیدا کردن h از روی k وجود ندارد و اصولاً این مسئله دارای جواب یکتا نیست. اما این مشکل نیز راه حل دارد. راه حل آن است که ساختار h بر حسب k مشخص باشد، یعنی فرض کنیم:

$$h = H(k)$$

که H تابعی معلوم و معکوس پذیر است. راه حل دیگری که درحقیقت حالت خاصی از راه حل فوق می باشد آن است که فرض کنیم عملگر مورد استفاده، یک سیستم شبه خطی باشد. به عنوان مثال دینامیک مناسب و بسیار ساده ای برای عملگر به صورت زیر است:

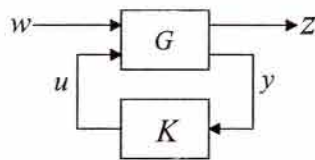
$$\varepsilon \dot{u} = k(\omega, q) + \hat{g}(\omega)u \quad (1)$$

$$\hat{g}(\omega) = -1$$

توجه کنید که فرض $\hat{g} = -1$ یک فرض ساده کننده می باشد و گر نه $\hat{g}$ می تواند هر تابع معکوس پذیر دارای ساختار معلوم باشد و با انتخاب $\hat{g} = -1$ به هیچ وجه از کلیت مسئله کاسته نمی شود.

در قدم بعد سعی داریم که دینامیک خطا را به دست آوریم. فرض کنید ω_r و q_r توابع هموار مشخص کننده وضعیت و سرعت زاویه ای مرجع ماهواره باشند. اگر در حالت پایدار سرعت زاویه ای ماهواره دقیقاً از ω_r و وضعیت دورانی آن دقیقاً از q_r تبعیت کنند با استفاده از رابطه (۶) و با فرض $v = 0$ داریم:

$$\begin{bmatrix} \dot{\omega}_r \\ \dot{q}_r \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f(\omega_r) \\ \frac{1}{2}Q(\omega_r)q_r \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} g(\omega_r) \\ 0 \end{bmatrix} u_r \quad (12)$$

شکل ۲ مسأله کنترل H_∞

هدف طراحی کنترل کننده K به صورت زیر است:

$$K: \quad \xi = \eta(\zeta, y), \quad \eta(0,0) = 0 \\ u = \theta(\zeta, y), \quad \theta(0,0) = 0$$

است به طوری که:

۱- سیستم حلقه بسته پایدار باشد

۲- بهره L_2 از w به z که به صورت زیر تعریف می شود حداقل شود یا از مقدار تعریف شده ای کوچکتر باشد:

$$G_2 = \sup_{w \neq 0} \frac{\left\{ \int_0^\infty \|z\|^2 dt \right\}^{1/2}}{\left\{ \int_0^\infty \|w\|^2 dt \right\}^{1/2}}$$

می توان نشان داد که کنترل کننده K در شرایط زیر موجود است:

لم (۱): اگر ماتریس

$$R_2(x) = k_{12}^T(x)k_{12}(x)$$

برای تمام x ها غیرتکین باشد کنترل بهینه $u^*(x, p)$ و

بدترین اغتشاش مجاز $w^*(x, p)$ برای سیستم (۷) با

رابطه زیر بیان می شود:

$$\begin{pmatrix} w^*(x, p) \\ u^*(x, p) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2\gamma^2} g_1^T(x)p \\ -R_2^{-1}(x) \left(-\frac{1}{2} g_2^T(x)p + k_{12}^T(x)h_1(x) \right) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha_1(x) \\ \alpha_2(x) \end{pmatrix} \quad (8)$$

که در آن $p = V_x^T = \left(\frac{\partial V}{\partial x} \right)^T$ تابعی هموار و مثبت

معین با شرط $V(0) = 0$ و جواب نامعادله هامیلتون - جاکوبی - ایزاک^۱ (HJI) است که به صورت زیر بیان می شود:

$$V_x \hat{f}(x) + \hat{h}_1^T(x) \hat{h}_1(x) + \frac{1}{4} V_x \hat{R}(x) V_x^T \leq 0 \quad (9)$$

$$\begin{bmatrix} \dot{\tilde{w}} \\ \dot{\tilde{q}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f(\tilde{w}) \\ \frac{1}{2} [Q(\tilde{w}) + Q(\omega_r)] \tilde{q} + \frac{1}{2} Q(\tilde{w}) q_r \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} g(\tilde{w}) \\ 0 \end{bmatrix} \hat{u} + \begin{bmatrix} g(\tilde{w}) \\ 0 \end{bmatrix} v$$

که برای سادگی آن را به صورت زیر می نویسیم:

$$\begin{bmatrix} \dot{\tilde{w}} \\ \dot{\tilde{q}} \end{bmatrix} = F(\tilde{w}, \tilde{q}, t) + G_2(\tilde{w}) \hat{u} + G_1(\tilde{w}) v \quad (5)$$

رابطه بیان کننده خروجی z نیز باید به صورت زیر اصلاح شود:

$$\hat{z} = [z \ 0 \ 0 \ 0]^T + k_{12} \hat{u} \quad (6)$$

$$k_{12} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & \beta_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \beta_2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \beta_3 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}^T$$

در نتیجه استفاده از تبدیل ها ما توانسته ایم معادله دینامیکی مربوط به سرعت های زاویه ای را از معادله ای متغیر با زمان (رابطه (۴)) به معادله ای ثابت نسبت به زمان (معادله (۵)) تبدیل کنیم. مجموعه معادلات (۱۵) و (۱۶) که بیان کننده سیستم شبه خطی (سیستم غیرخطی که نسبت به ورودی و اغتشاش خطی باشد) است، معادلاتی اند که در بخش های بعدی از آنها استفاده خواهیم کرد.

۴- تشکیل نامعادله HJI و حل آن

اجازه دهید در ابتدای این بخش نگاهی به تعریف مسأله کنترل H_∞ غیرخطی برای سیستم های شبه خطی نامتغیر با زمان بیاندازیم. شکل ۲ را در نظر بگیرید و فرض کنید G یک سیستم شبه خطی نا متغیر با زمان بوده و با معادلات دینامیکی زیر بیان شود:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= f(x) + g_1(x)w + g_2(x)u, \quad f(0) = 0 \\ z &= h_1(x) + k_{12}(x)u, \quad h_1(0) = 0 \\ y &= h_2(x) + k_{21}(x)w, \quad h_2(0) = 0 \end{aligned} \quad (7)$$

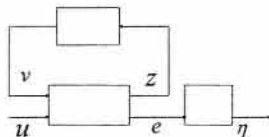
که در آن x بردار حالت سیستم است.

$$\begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{\eta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f(x) \\ B\eta + \phi(x) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} g_1(x) \\ \theta_1(x) \end{bmatrix} w + \begin{bmatrix} g_2(x) \\ \theta_2(x) \end{bmatrix} u \quad (۲)$$

$$z = h_1(x) + k_{12}(x)u$$

$$y = h_2(x) + k_{21}(x)w$$

سیستمهای متداخل نامیده می‌شوند (شکل ۳).



شکل ۳ سیستم متداخل

در ادامه فرض کنید که $(x, \eta) = (0, 0)$ نقطه تعادل این سیستم بوده و شرایط ساده‌کننده زیر نیز برقرار باشد:

$$k_{12}^T(x)k_{12}(x) = I, \quad h_1^T(x)k_{12}(x) = 0$$

$$k_{21}(x)k_{21}^T(x) = I, \quad h_1(x)k_{21}^T(x) = 0$$

همچنین فرض کنید برای سادگی در نوشتن از تعریف‌های زیر استفاده کنیم:

$$F(x, \eta) = \begin{bmatrix} f(x) \\ B\eta + \phi(x) \end{bmatrix}$$

$$G_1(x) = \begin{bmatrix} g_1(x) \\ \theta_1(x) \end{bmatrix}$$

$$G_2(x) = \begin{bmatrix} g_2(x) \\ \theta_2(x) \end{bmatrix}$$

در این صورت نامعادله HJI این سیستم به صورت زیر خواهد بود:

$$W_{(x, \eta)} F(x, \eta) + h_1^T(x)h_1(x) \quad (۲)$$

$$+ \frac{1}{4} W_{(x, \eta)} \left[\frac{1}{\gamma^2} G_1(x)G_1^T(x) - G_2(x)G_2^T(x) \right] W_{(x, \eta)}^T \leq 0$$

که در آن:

$$W_{(x, \eta)} = \begin{bmatrix} \frac{\partial W(x, \eta)}{\partial x} & \frac{\partial W(x, \eta)}{\partial \eta} \end{bmatrix}$$

اگر این نامعادله حل مثبت معین داشته باشد در این صورت قانون کنترل:

توجه کنید که در این معادله داریم:

$$\hat{f}(x) = f(x) - g_2(x)R_2^{-1}(x)k_{12}^T(x)h_1(x)$$

$$\hat{h}_1(x) = [I - k_{12}(x)R_2^{-1}(x)k_{12}^T(x)]h_1(x)$$

$$\hat{R}(x) = \frac{1}{\gamma^2} g_1(x)g_1^T(x) - g_2(x)R_2^{-1}(x)g_2^T(x)$$

قضیه زیر که در مبحث کنترل H_∞ غیرخطی بیان می‌شود به بررسی مسأله پایداری سیستم حلقه بسته در هنگام استفاده از قانون کنترل (λ) می‌پردازد.

قضیه ۱ فرض کنید شرط موجود در لم (۱) برای سیستم (۷) برقرار بوده و یک تابع مثبت معین و هموار $V(x)$ وجود داشته باشد به طوری که نامعادله (۹) همواره کوچکتر از صفر باشد. در این صورت مسأله کاهش اثر اغتشاش همراه با پایداری مجانبی داخلی توسط قانون پس‌خور حالت (λ) حل می‌شود.

گرچه معادله (λ) شکل کلی کنترل‌کننده مطلوب را ارائه می‌دهد اما از آنجا که در بیشتر اوقات نمی‌توانیم حل بسته تحلیلی برای نامعادله HJI بیابیم در طراحی با مشکل مواجه می‌شویم. خوشبختانه در برخی حالتها می‌توان یک حل بسته تحلیلی برای این نامعادله به دست آورد که از جمله آنها، سیستمهای غیرخطی متداخل نامتغیر با زمان است.

مرجع [۱] مسأله تنظیم در سیستم غیرخطی را در حضور یک نامعینی با بهره محدود مطالعه کرده است اما در خلال بحث، به قضیه‌ای اشاره کرده است که ممکن است در مواردی به یافتن حل تحلیلی و بسته نامعادله HJI برای سیستمهای غیرخطی متداخل منجر شود. با توجه به اهمیت این قضیه و کاربرد آن در این مقاله، در این بخش پس از تعریف سیستمهای متداخل و ذکر نکاتی چند این قضیه را بیان می‌کنیم.

بر طبق تعریف دسته‌ای از سیستمهای غیرخطی که معادلات دینامیکی آنها به صورت زیر قابل توصیف باشد:

$$\delta_1(x) = \left[\frac{\partial \lambda}{\partial x} \quad -I \right] G_1(x)$$

$$\delta_2(x) = \left[\frac{\partial \lambda}{\partial x} \quad -I \right] G_2(x)$$

در نامعادله

$$\gamma^2 \delta_2(x) \delta_2^T(x) - \delta_1(x) \delta_1^T(x) \geq 0 \quad (4)$$

صدق کنند.

که در این صورت تابع معین

$$W(x, \eta) = V(x) + \|\eta - \lambda(x)\|^2 \quad (5)$$

یک حل از نامعادله (4) است و کنترل کننده H_∞ برای سیستم (4) با عبارت زیر بیان می شود:

$$u = \alpha_2(x) + \delta_2^T(x)(\eta - \lambda(x)) \quad (6)$$

بعلاوه اگر رابطه (4) اکیداً مثبت باشد کنترل کننده فوق پایداری مجانبی سیستم حلقه بسته را نیز تأمین می کند.

قضیه فوق این امیدواری را ایجاد می کند که در صورت یافتن قضیه ای معادل برای سیستم های غیر خطی متداخل متغیر با زمان، بتوان راه حل تحلیلی بسته ای را برای مسئله کنترل وضعیت ماهواره به دست آورد. نگارندگان با تعمیم قضیه فوق قضیه ای را برای این گروه از سیستم های غیر خطی به دست آورده اند که در ذیل آورده می شود.

قضیه 3 سیستم متداخل و متغیر با زمان زیر را در نظر بگیرید

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{\eta} \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} f(x, t) \\ B(x, t)\eta + \phi(x, t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} g_1(x) \\ \theta_1(x) \end{bmatrix} d + \begin{bmatrix} g_2(x) \\ \theta_2(x) \end{bmatrix} u \\ z &= h_1(x, t) + k_{12}(x, t)u \\ y &= h_2(x, t) + k_{21}(x, t)d \end{aligned}$$

(7)

که در آن $B(x, t)$ یک ماتریس پاد متقارن بوده و شرایط ساده کننده زیر برقرار است:

$$k_{12}^T(x, t)[h_1(x, t) \quad k_{12}(x, t)] = [0 \quad I] \quad (\text{الف} - 8)$$

$$\begin{bmatrix} g_1(x) \\ k_{21}(x, t) \end{bmatrix} k_{21}^T(x, t) = \begin{bmatrix} 0 \\ I \end{bmatrix} \quad (\text{ب} - 8)$$

بعلاوه فرض کنید شرایط زیر نیز برقرار باشد:

$$u = -\frac{1}{2} G_2^T(x) W_{(x, \eta)}^T$$

مسئله کاهش اثر اغتشاش با بهره γ را برای سیستم حلقه بسته حل می کند. علاوه بر این اگر شرایط اضافی دیگری برقرار باشد سیستم حلقه بسته در نقطه تعادل $(x, \eta) = (0, 0)$ پایدار مجانبی خواهد بود. اکنون می خواهیم بدانیم با فرض اینکه مسئله کاهش اثر اغتشاش با بهره γ برای زیرسیستم بالایی سیستم (4) یعنی:

$$\dot{x} = f(x) + g_1(x)w + g_2(x)u \quad (2)$$

قابل حل بوده و تابع مثبت معین $V(x)$ موجود باشد به گونه ای که در نامعادله HJI مربوط به این زیر سیستم یعنی:

$$V_x f(x) + h_1^T(x) h_1(x) + \frac{1}{4} V_x \left[\frac{1}{\gamma^2} g_1(x) g_1^T(x) - g_2(x) g_2^T(x) \right] V_x^T \leq 0$$

صدق کند آیا می توان $W(x, \eta)$ را از روی $V(x)$ به دست آورد یا خیر؟

قبل از اینکه به بررسی این مسئله بپردازیم، یادآور می شویم که مقادیر کنترل بهینه H_∞ غیر خطی و بدترین اغتشاش ممکن برای سیستم (2) از روابط زیر به دست می آیند:

$$\alpha_1(x) = \frac{1}{2\gamma^2} g_1^T(x) V_x^T$$

$$\alpha_2(x) = -\frac{1}{2} g_2^T(x) V_x^T$$

قضیه 2 فرض کنید در سیستم (4)، F یک ماتریس پاد متقارن بوده و شرایط زیر برقرار باشند:

۱- نامعادله (2) حل مثبت معین $V(x)$ دارد.

۲- معادله دیفرانسیل پاره ای

$$\left[\frac{\partial \lambda}{\partial x} \quad -I \right] F^*(x, \eta) \Big|_{\eta=\lambda(x)} = 0, \quad \lambda(0) = 0 \quad (3)$$

که در آن:

$$F^*(x, \eta) = F(x, \eta) + G_1(x) \alpha_1(x) + G_2(x) \alpha_2(x)$$

یک حل هموار $\lambda(x)$ دارد.

۳- توابع $\delta_1(x)$ و $\delta_2(x)$ که از عبارتهای زیر به دست می آیند:

اثبات: تابع $V(x, t)$ در نامعادله HJI صدق می‌کند لذا مطابق آنچه پیشتر ذکر شد روابط زیر برقرار است:

$$V_t + V_x f(x, t) + h_1^T h_1 + \quad (3)$$

$$\frac{1}{4} V_x \left(\frac{1}{\gamma^2} g_1 g_1^T - g_2 g_2^T \right) V_x^T \leq 0$$

$$V_t + V_x \dot{x} + h_1^T h_1 + u^T u - \gamma^2 d^T d = \quad (3)$$

$$HJ_V(x, t) + \|u - \alpha_2(x, t)\|^2 - \gamma^2 \|d - \alpha_1(x, t)\|^2$$

که در (۳) منظور از $HJ_V(x, t)$ عبارت طرف چپ رابطه (۳) است. بعلاوه اگر $W(x, \eta, t)$ نیز یک حل از نامعادله HJI سیستم (۴) باشد، روابط زیر باید برقرار باشند:

$$W_t + W_{(x, \eta)} F(x, \eta, t) + \quad (4)$$

$$h_1^T h_1 + \frac{1}{4} W_{(x, \eta)} \left(\frac{1}{\gamma^2} G_1 G_1^T - G_2 G_2^T \right) W_{(x, \eta)}^T \leq 0$$

$$W_t + W_{(x, \eta)} \left[\begin{array}{c} \dot{x} \\ \dot{\eta} \end{array} \right] + h_1^T h_1 + \quad (5)$$

$$u^T u - \gamma^2 d^T d = HJ_W(x, \eta, t) +$$

$$\|u - \alpha'_2(x, \eta, t)\|^2 - \gamma^2 \|d - \alpha'_1(x, \eta, t)\|^2$$

در اینجا نیز منظور از $HJ_W(x, \eta, t)$ طرف چپ رابطه (۴) بوده و α'_1 و α'_2 نیز عبارتند از:

$$\alpha'_1(x, \eta, t) = \frac{1}{2\gamma^2} G_1^T W_{(x, \eta)}^T = \alpha_1(x, t) - \frac{1}{\gamma^2} \delta_1^T(x, t) \mu$$

$$\alpha'_2(x, \eta, t) = -\frac{1}{2} G_2^T W_{(x, \eta)}^T = \alpha_2(x, t) + \delta_2^T(x, t) \mu \quad (6)$$

$$\mu = \eta - \lambda(x, t)$$

اکنون فرض کنید $W(x, \eta, t)$ را همانند رابطه (۴)

انتخاب کرده باشیم. در این صورت داریم:

$$W_{(x, \eta)} = \left[\begin{array}{cc} V_x - 2\mu^T \frac{\partial \lambda}{\partial x} & 2\mu^T \end{array} \right] \quad (7)$$

$$W_t = V_t - 2\mu^T \frac{\partial \lambda}{\partial t}$$

با جایگزینی (۷) در (۵) و کم کردن (۳) از آن به دست می‌آوریم:

۱- تابع $V(x, t)$ وجود داشته باشد به طوری که در نامعادله HJI زیرسیستم بالایی یعنی:

$$\dot{x} = f(x, t) + g_1(x) d + g_2(x) u$$

صدق کند و برای سهولت در نگارش از تعاریف استفاده کنیم:

$$\alpha_1(x, t) = \frac{1}{2\gamma^2} g_1^T(x) V_x^T(x, t)$$

$$\alpha_2(x, t) = -\frac{1}{2} g_2^T(x) V_x^T(x, t)$$

۲- تابع هموار $\lambda(x, t)$ وجود داشته باشد به طوری که:

اولاً در معادله دیفرانسیل جزئی زیر صدق کند:

$$\left[\frac{\partial \lambda}{\partial x} - I \right] F^*(x, \eta, t) \Big|_{\eta = \lambda(x, t)} = 0, \quad \lambda(0, t) = 0$$

و ثانیاً به ازای هر x و η داشته باشیم:

$$(\eta - \lambda(x, t))^T \frac{\partial \lambda(x, t)}{\partial t} \geq 0$$

F ، G_1 و G_2 تعاریفی همانند آنچه در قضیه ۲ آمد دارند.

در این صورت اگر $\delta_1(x, t)$ و $\delta_2(x, t)$ که با روابط زیر تعریف می‌شوند:

$$\delta_1(x, t) = \left[\frac{\partial \lambda}{\partial x} - I \right] G_1(x)$$

$$\delta_2(x, t) = \left[\frac{\partial \lambda}{\partial x} - I \right] G_2(x)$$

در رابطه:

$$-\delta_1(x, t) \delta_1^T(x, t) + \gamma^2 \delta_2(x, t) \delta_2^T(x, t) \geq 0 \quad (8)$$

صدق کنند، آنگاه تابع:

$$W(x, \eta, t) = V(x, t) + \|\eta - \lambda(x, t)\|^2 \quad (9)$$

یک حل از نامعادله HJI سیستم (۴) بوده و کنترل‌کننده H_∞ برای این سیستم از رابطه زیر به دست می‌آید:

$$u(x, \eta, t) = \alpha_2(x, t) + \delta_2^T(x, t) (\eta - \lambda(x, t)) \quad (10)$$

بعلاوه اگر رابطه (۹) اکیداً بزرگتر از صفر باشد این کنترل‌کننده پایداری مجانبی سیستم حلقه بسته را نیز تأمین می‌کند.

$$\begin{aligned} & [ak_x + bk_y + ck_z] \tilde{\omega}_x \tilde{\omega}_y \tilde{\omega}_z + \left[\frac{a^2}{J_x^2} \frac{1-\gamma^2}{4\gamma^2} + \alpha_1^2 \right] \tilde{\omega}_x^2 \\ & + \left[\frac{b^2}{J_y^2} \frac{1-\gamma^2}{4\gamma^2} + \alpha_2^2 \right] \tilde{\omega}_y^2 + \left[\frac{c^2}{J_z^2} \frac{1-\gamma^2}{4\gamma^2} + \alpha_3^2 \right] \tilde{\omega}_z^2 \leq 0 \end{aligned}$$

که در آن برای سهولت در نگارش از تعاریف زیر بهره برده ایم:

$$k_x = \frac{J_y - J_z}{J_x}$$

$$k_y = \frac{J_z - J_x}{J_y}$$

$$k_z = \frac{J_x - J_y}{J_z}$$

اکنون اگر فرض کنیم $\gamma > 1$ برای اینکه نامعادله همواره برقرار باشد باید شرایط زیر برقرار باشند:

$$ak_x + bk_y + ck_z = 0$$

$$\frac{a^2}{J_x^2} \frac{1-\gamma^2}{4\gamma^2} + \alpha_1^2 \leq 0$$

$$\frac{b^2}{J_y^2} \frac{1-\gamma^2}{4\gamma^2} + \alpha_2^2 \leq 0$$

$$\frac{c^2}{J_z^2} \frac{1-\gamma^2}{4\gamma^2} + \alpha_3^2 \leq 0$$

در نتیجه باید داشته باشیم:

$$\begin{aligned} b & \geq \frac{-2\gamma}{\sqrt{\gamma^2 - 1}} J_y \alpha_2 = b^* \geq 0 \\ c & \geq \frac{-2\gamma}{\sqrt{\gamma^2 - 1}} J_z \alpha_3 = c^* \geq 0 \quad (4) \\ a & = -\frac{1}{k_x} (bk_y + ck_z) \geq \frac{-2\gamma}{\sqrt{\gamma^2 - 1}} J_x \alpha_1 = a^* \geq 0 \end{aligned}$$

بنابراین اگر محدوده مجاز تغییرات α_i ها را به دست آوریم می‌توانیم محدوده مجاز تغییرات a ، b و c را مشخص کرده و مقادیر مناسب را انتخاب کنیم. اما قبل از اینکه به ادامه کار بپردازیم اجازه دهید اندکی به جلوتر رفته مطلبی را بیان کرده و آنگاه ادامه دهیم.

$$HJ_w(x, \eta, t) + \|u - \alpha_2(x, t) - \gamma_2^T(x, t)\mu\|^2 -$$

$$\gamma^2 \|d - \alpha_1(x, t) + \frac{1}{\gamma^2} \delta_1^T(x, t)\mu\|^2 =$$

$$HJ_v(x, t) + \|u - \alpha_2(x, t) - \gamma^2 \|d - \alpha_1(x, t)\|^2 + 2\mu^T \dot{\mu} - 2\mu^T \frac{\partial \lambda}{\partial t}$$

از طرف دیگر اگر معادلات (۳) را بر حسب متغیر جدید μ بازنویسی کنیم معادلات زیر نتیجه می‌شود:

$$\dot{x} = f(x, t) + g_1(x)d + g_2(x)u$$

$$\dot{\mu} = B(x, t)\mu + \delta_1(x, t)(\alpha_1(x, t) - d) + \delta_2(x, t)(\alpha_2(x, t) - u)$$

اما عبارت بیان کننده متغیر z تغییری نخواهد کرد. از جایگزین کردن $\dot{\mu}$ در رابطه قبلی و با در نظر گرفتن اینکه B یک ماتریس پاد متقارن است و با انتخاب:

$$d = \alpha_1(x, t) - \frac{1}{\gamma^2} \delta_1^T(x, t)\mu \quad (\kappa)$$

$$u = \alpha_2(x, t) + \delta_2^T(x, t)\mu$$

به رابطه زیر می‌رسیم:

$$HJ_w(x, \eta, t) = HJ_v(x, t) -$$

$$\mu^T \left(\delta_2 \delta_2^T - \frac{1}{\gamma^2} \delta_1 \delta_1^T \right) \mu - 2\mu^T \frac{\partial \lambda}{\partial t}$$

که با توجه به فرضیات مطرح شده در صورت قضیه HJ_w همواره کوچکتر از صفر بوده و اثبات قضیه تمام است.

توجه کنید که اگر λ تابعی مستقل از زمان باشد آنگاه $\frac{\partial \lambda}{\partial t} = 0$ و به نتایج مطروح در قضیه ۲ خواهیم رسید.

اکنون سعی می‌کنیم با استفاده از این قضیه نامعادله HJI سیستم (۵) و (۶) را تشکیل داده و آن را حل کنیم. ابتدا سعی می‌کنیم شرط ساده‌کننده (الف) را برآورده سازیم. بدین منظور باید داشته باشیم:

$$\beta_1 = \beta_2 = \beta_3 = \pm 1 \quad (\kappa)$$

سپس نامعادله HJI (۳) را حل می‌کنیم. فرض کنید:

$$V(\tilde{\omega}) = \frac{1}{2} (a\tilde{\omega}_x^2 + b\tilde{\omega}_y^2 + c\tilde{\omega}_z^2)$$

انتخاب کنیم که در آن a ، b و c مقادیری مثبت و فعلاً نامعلوم هستند. با قراردادن این تابع در (۳) و ساده کردن عبارات ریاضی به نامعادله زیر خواهیم رسید:

b و c را به دست می‌آوریم و آنگاه محدوده تغییرات مجاز α_i ها را پیدا می‌کنیم. داریم:

$$p_{11} = \frac{1-\gamma^2}{2\gamma^2} \frac{a}{J_x^2} - 0.5 \rightarrow a = J_x^2 \frac{\gamma^2}{\gamma^2-1}$$

$$p_{22} = \frac{1-\gamma^2}{2\gamma^2} \frac{b}{J_y^2} - 0.5 \rightarrow b = J_y^2 \frac{\gamma^2}{\gamma^2-1}$$

$$p_{33} = \frac{1-\gamma^2}{2\gamma^2} \frac{c}{J_z^2} - 0.5 \rightarrow c = J_z^2 \frac{\gamma^2}{\gamma^2-1}$$

بدیهی است که این مقادیر به دست آمده باید در شرایط (۴) صدق کنند. در نتیجه محدوده تغییرات α_i ها به صورت زیر به دست می‌آید:

$$-\frac{1}{2} \frac{\gamma}{\sqrt{\gamma^2-1}} J_x \leq \alpha_1 \leq 0 \quad (۴)$$

$$-\frac{1}{2} \frac{\gamma}{\sqrt{\gamma^2-1}} J_y \leq \alpha_2 \leq 0$$

$$-\frac{1}{2} \frac{\gamma}{\sqrt{\gamma^2-1}} J_z \leq \alpha_3 \leq 0$$

اکنون برای هر $\bar{\alpha}_2$ و $\bar{\alpha}_3$ دلخواه به صورت زیر:

$$\bar{\alpha}_2 = -\frac{1}{2S_2} \frac{\gamma}{\sqrt{\gamma^2-1}} J_y, \quad S_2 \geq 1 \quad (۴)$$

$$\bar{\alpha}_3 = -\frac{1}{2S_3} \frac{\gamma}{\sqrt{\gamma^2-1}} J_z, \quad S_3 \geq 1$$

کافی است انتخاب کنیم:

$$b = b^* + \frac{\gamma^2}{\gamma^2-1} \left(1 - \frac{1}{S_2}\right) J_y^2 \quad (۴)$$

$$c = c^* + \frac{\gamma^2}{\gamma^2-1} \left(1 - \frac{1}{S_3}\right) J_z^2$$

$$a = -\frac{1}{k_x} (k_y b + k_z c)$$

تا ماتریس P همواره ماتریس مطلوب ما باشد.

در گام بعدی باید تابع $\lambda(\tilde{\omega}, t)$ را طوری تعیین کنیم که معادله دیفرانسیل جزئی زیر را بر آورده نماید:

$$\left[\frac{\partial \lambda}{\partial \tilde{\omega}} - I \right] F^*(\tilde{\omega}, \tilde{q}, t) \Big|_{\tilde{q}=\lambda(\tilde{\omega}, t)} = 0 \quad (۴)$$

$$\lambda(0, t) = 0$$

این معادله دارای شکل گسترده زیر است:

فرض کنید مقادیر مناسب a و b و c را پیدا کرده ایم این مقادیر را بترتیب a_0, b_0, c_0 بنامید. می‌خواهیم تابع F^* را که در قضیه ۳ ذکر شد به دست آوریم. داریم:

$$\alpha_2(\tilde{\omega}) = -\frac{1}{2} g_2^T(\tilde{\omega}) V_{\tilde{\omega}}^T$$

$$= -\frac{1}{2} \begin{bmatrix} \frac{1}{J_x} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{J_y} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{J_z} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_0 \tilde{\omega}_x \\ b_0 \tilde{\omega}_y \\ c_0 \tilde{\omega}_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{a_0}{2J_x} \tilde{\omega}_x \\ -\frac{b_0}{2J_y} \tilde{\omega}_y \\ -\frac{c_0}{2J_z} \tilde{\omega}_z \end{bmatrix}$$

$$\alpha_1(\tilde{\omega}) = \frac{1}{2\gamma^2} g_1^T(\tilde{\omega}) V_{\tilde{\omega}}^T = \begin{bmatrix} \frac{a_0}{2\gamma^2 J_x} \tilde{\omega}_x \\ \frac{b_0}{2\gamma^2 J_y} \tilde{\omega}_y \\ \frac{c_0}{2\gamma^2 J_z} \tilde{\omega}_z \end{bmatrix}$$

اگر این مقادیر را در رابطه F^* قرار دهیم، داریم:

$$F^* = F + \begin{bmatrix} P \\ 0 \end{bmatrix} \tilde{\omega} \quad (۴)$$

که در آن P ماتریسی قطری به صورت زیر است:

$$P = \frac{1-\gamma^2}{2\gamma^2} \begin{bmatrix} \frac{a_0}{J_x} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{b_0}{J_y} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{c_0}{J_z} \end{bmatrix}$$

بنا به دلایلی که بزودی به آن اشاره خواهیم کرد مایل هستیم که همه المانهای غیر صفر P برابر -0.5 باشد یعنی:

$$P = \begin{bmatrix} -0.5 & 0 & 0 \\ 0 & -0.5 & 0 \\ 0 & 0 & -0.5 \end{bmatrix}$$

با در نظر گرفتن این نکته، اکنون به حل مسأله تعیین ضرایب برمی‌گردیم اما باز مسأله را به صورت معکوس حل می‌کنیم. یعنی با معلوم بودن P ، ضرایب a

باید شرایط مرزی معلوم باشد. برای مثال اگر بخواهیم این معادلات را برای ناحیه $D \subseteq \mathbb{R}^4$ حل کنیم در اینصورت باید مقادیر تابع را برای نقاط واقع در سطح ناحیه مربوط بدانیم. در حالی که در معادله مورد نظر ما، فقط یک شرط اولیه موجود است. بعلاوه این روشها بسیار وقت گیر است زیرا باید مجموعه‌ای از معادلات جبری را حل کنیم که تعداد بسیار زیادی متغیر دارند. از طرف دیگر در قانون کنترل به مشتقات پاره‌ای تابع λ نیز نیاز داریم، لذا تقسیم‌بندی فضای مورد نظر باید بسیار ریز انجام شود و این به معنی زیاد شدن تعداد مجهولات و طولانی‌تر شدن زمان پردازش است. از طرف دیگر استفاده از تقریب‌های ساده کننده - اگرچه ممکن است به پیدا شدن حل تحلیلی و بسته‌ای برای معادلات بینجامد - اما معایبی نیز دارد. مهمترین عیب این روش نفس تقریب زدن است. درصورت استفاده از تقریب‌های ساده‌کننده، به احتمال زیاد عمل تعقیب فرمان‌های مرجع به صورت کامل انجام نخواهد شد بلکه فقط می‌توان امیدوار بود که خروجی‌های واقعی در همسایگی قابل قبولی از خروجی‌های مدل مرجع قرار گیرند. مشکل زمان‌بر بودن الگوریتم‌ها نیز در این روش ممکن است پابرجا باشد. بار دیگر رابطه (5) را در نظر بگیرید. در این رابطه معادله دیفرانسیل دینامیک خطای کواترین‌ها به صورت زیر بیان شده است:

$$\dot{\tilde{q}} = \frac{1}{2} [Q(\tilde{\omega}) + Q(\omega_r)] \tilde{q} + \frac{1}{2} Q(\tilde{\omega}) q_r$$

توجه کنید که اگر کنترل طراحی شده پایداری سیستم را تضمین کند از آنجا که اختلاف میان خروجی‌های سیستم اصلی و مدل کاهش مرتبه یافته از مرتبه ε است انتظار داریم که در خارج از لایه مرزی مقدار $\tilde{\omega}$ در مقایسه با ω_r قابل صرف نظر باشند بنابراین می‌توان $Q(\tilde{\omega}) + Q(\omega_r)$ را با $Q(\omega_r)$ تقریب زد و دینامیک خطای کواترین‌ها را به صورت زیر ساده کرد:

$$\dot{\tilde{q}} = \frac{1}{2} Q(\omega_r) \tilde{q} + \frac{1}{2} Q(\tilde{\omega}) q_r \quad (6)$$

$$\begin{aligned} & \begin{bmatrix} \frac{\partial \lambda_1}{\partial \tilde{\omega}_1} \\ \frac{\partial \lambda_2}{\partial \tilde{\omega}_2} \\ \frac{\partial \lambda_3}{\partial \tilde{\omega}_3} \\ \frac{\partial \lambda_4}{\partial \tilde{\omega}_4} \end{bmatrix} + \text{diag}(k_x \tilde{\omega}_x \tilde{\omega}_z + p_{11} \tilde{\omega}_x) \begin{bmatrix} \frac{\partial \lambda_1}{\partial \tilde{\omega}_1} \\ \frac{\partial \lambda_2}{\partial \tilde{\omega}_2} \\ \frac{\partial \lambda_3}{\partial \tilde{\omega}_3} \\ \frac{\partial \lambda_4}{\partial \tilde{\omega}_4} \end{bmatrix} + \text{diag}(k_y \tilde{\omega}_y \tilde{\omega}_z + p_{22} \tilde{\omega}_y) \begin{bmatrix} \frac{\partial \lambda_1}{\partial \tilde{\omega}_1} \\ \frac{\partial \lambda_2}{\partial \tilde{\omega}_2} \\ \frac{\partial \lambda_3}{\partial \tilde{\omega}_3} \\ \frac{\partial \lambda_4}{\partial \tilde{\omega}_4} \end{bmatrix} + \\ & \text{diag}(k_z \tilde{\omega}_x \tilde{\omega}_y + p_{33} \tilde{\omega}_z) \begin{bmatrix} \frac{\partial \lambda_1}{\partial \tilde{\omega}_1} \\ \frac{\partial \lambda_2}{\partial \tilde{\omega}_2} \\ \frac{\partial \lambda_3}{\partial \tilde{\omega}_3} \\ \frac{\partial \lambda_4}{\partial \tilde{\omega}_4} \end{bmatrix} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 0 & \tilde{\omega}_z & -\tilde{\omega}_y & \tilde{\omega}_x \\ -\tilde{\omega}_z & 0 & \tilde{\omega}_x & \tilde{\omega}_y \\ \tilde{\omega}_y & -\tilde{\omega}_x & 0 & \tilde{\omega}_z \\ -\tilde{\omega}_x & -\tilde{\omega}_y & -\tilde{\omega}_z & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \\ q_3 \\ q_4 \end{bmatrix} \\ & + \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 0 & \tilde{\omega}_x + \omega_{rx} & -\tilde{\omega}_y - \omega_{ry} & \tilde{\omega}_z + \omega_{rz} \\ -\tilde{\omega}_z - \omega_{rz} & 0 & \tilde{\omega}_x + \omega_{rx} & \tilde{\omega}_y + \omega_{ry} \\ \tilde{\omega}_y + \omega_{ry} & -\tilde{\omega}_x - \omega_{rx} & 0 & \tilde{\omega}_z + \omega_{rz} \\ -\tilde{\omega}_x - \omega_{rx} & -\tilde{\omega}_y - \omega_{ry} & -\tilde{\omega}_z - \omega_{rz} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \lambda_3 \\ \lambda_4 \end{bmatrix} \quad (5) \end{aligned}$$

در بخش بعد روش حل این معادله را بیان خواهیم کرد.

5- تقریب ساده کننده

با نگاهی به معادلات (5) متوجه می‌شویم که با یک دسته معادلات دیفرانسیل جزئی تزویج شده¹ سروکار داریم. شاید اولین راهی که برای حل این دسته معادلات به ذهن می‌رسد جداسازی این معادلات باشد، یعنی کاری کنیم که در هر معادله فقط یک متغیر و مشتقات جزئی آن وجود داشته باشد اما متأسفانه امکان این جداسازی وجود ندارد. یک دلیل، معکوس ناپذیر بودن ماتریس‌های $Q(\tilde{\omega})$ و $Q(\omega_r)$ است. همچنین استفاده از روشهای حل مبتنی بر بسط تیلور نیز امکان پذیر نیست زیرا اولاً این روشها جوابهایی محلی برای معادله جزئی پیشنهاد می‌کنند و ثانیاً با توجه به اینکه بردار λ 4 مؤلفه و هر مؤلفه 3 آرگومان دارد محاسبات بسیار پیچیده خواهد بود. بنابراین برای حل این معادلات دو راه بیشتر باقی نمی‌ماند:

۱- ساده‌سازی معادلات با استفاده از تقریب‌های مناسب.

۲- حل عددی معادلات.

هر یک از این دو روش مزایا و معایبی دارند. در روشهای عددی حل معادلات دیفرانسیل با مشتقات جزئی عموماً

$$-\sum_{i=1}^m \frac{\partial}{\partial x_i} (GA_i u) = -Gf + \delta(x - \zeta)u$$

در نتیجه:

$$-\int_{-\infty}^{+\infty} \sum_{i=1}^m \frac{\partial}{\partial x_i} (GA_i u) dx = u(\zeta) - \int_{-\infty}^{+\infty} Gf dx = 0$$

و از اینجا $u(\zeta)$ به دست می‌آید:

$$u(\zeta) = \int_{-\infty}^{+\infty} Gf dx$$

و یا با جابجایی متغیرها:

$$u(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} Gf dx \quad (۴)$$

توجه کنید که در رابطه اخیر اگر از f به عنوان ورودی و از u به عنوان خروجی سیستم تعبیر کنیم ماتریس G نشان دهنده پاسخ ضربه سیستم خواهد بود.

۷- حل نامعادله HJI، به دست آوردن قانون کنترل

در ادامه تلاش می‌کنیم با استفاده از تقریب ساده کننده بخش ۵ و تابع گرین یک حل بسته تحلیلی برای معادله (۵) پیدا کنیم. پس از تقریب زدن تابع F^* به صورت زیر در می‌آید:

$$F^* = \begin{bmatrix} f(\tilde{\omega}) + P\tilde{\omega} \\ \frac{1}{2}Q(\omega_r)\tilde{q} + \frac{1}{2}Q(\tilde{\omega})q_r \end{bmatrix} \quad (۵)$$

اگر معادله دیفرانسیل جزئی ماتریس گرین را برای سیستم (۵) بنویسیم داریم:

$$-\frac{\partial}{\partial \tilde{\omega}_1} (G \cdot \text{diag}(k_1 \tilde{\omega}_1 \tilde{\omega}_2 + p_{11} \tilde{\omega}_1)) - \frac{\partial}{\partial \tilde{\omega}_2} (G \cdot \text{diag}(k_1 \tilde{\omega}_1 \tilde{\omega}_2 + p_{22} \tilde{\omega}_2)) - \frac{\partial}{\partial \tilde{\omega}_3} (G \cdot \text{diag}(k_2 \tilde{\omega}_1 \tilde{\omega}_3 + p_{33} \tilde{\omega}_3)) - \frac{1}{2} G Q(\omega_r) = \delta(\tilde{\omega} - \zeta) I$$

که پس از انجام عملیات ریاضی و ساده سازی به صورت زیر در می‌آید:

این تقریب در عین اینکه برای بخش اعظمی از زمان مانور معتبر می‌باشد امکان حل تحلیلی نامعادله (۵) را نیز فراهم می‌سازد ولی برای لحظات آغازین و پایانی مانور از دقت خوبی برخوردار نیست زیرا در این لحظات ماهواره یا تازه مانور خود را آغاز کرده یا در مراحل آخرین مانور و ساکن شدن در وضعیت جدید قرار دارد و این به معنی کوچک بودن مقادیر مرجع و قابل مقایسه شدن $\tilde{\omega}$ با ω_r است. در نتیجه ممکن است ماهواره دقیقاً در وضعیت دورانی از پیش تعیین شده قرار نگرفته و دچار انحراف شود. بحث درباره اینکه این انحراف تا حد قابل قبول و در چه صورت غیر قابل قبول است در بخشهای بعدی ارائه خواهد شد.

۶- تابع گرین^۱

مرجع [۱] که به تفصیل به بررسی و حل معادلات دیفرانسیل جزئی پرداخته است در یکی از ضmann خود به روشی برای حل معادلات یا دستگاه معادلات دیفرانسیل جزئی اشاره دارد که برای حل مسئله ما مفید است. دستگاه معادلات دیفرانسیل جزئی زیر را در نظر بگیرید:

$$\sum_{i=1}^m A_i \frac{\partial u}{\partial x_i} + Bu = f \quad (۶)$$

در این رابطه u بردار مطلوب و A_i و B ماتریس‌هایی با ابعاد مناسب است. برای حل این معادله ماتریس گرین $G(x, \zeta)$ را به صورت جواب معادله دیفرانسیل جزئی زیر تعریف می‌کنیم:

$$-\sum_{i=1}^m \frac{\partial}{\partial x_i} (GA_i) + GB = \delta(x - \zeta) I \quad (۷)$$

اگر رابطه (۶) را از سمت چپ در G و رابطه (۷) را از سمت راست در u ضرب کرده و آنگاه (۷) را از (۶) کم کرده و عبارت حاصل را ساده کنیم خواهیم داشت:

1. Green's function

$$E = \frac{\frac{\zeta_2^2}{k_y} + \frac{\zeta_3^2}{k_z} - 2\frac{\zeta_1^2}{k_x}}{\frac{\tilde{\omega}_y^2}{k_y} + \frac{\tilde{\omega}_z^2}{k_z} - 2\frac{\tilde{\omega}_x^2}{k_x}} \quad (5)$$

$$R = \sqrt{\omega_{rx}^2 + \omega_{ry}^2 + \omega_{rz}^2}$$

وسرانجام تابع $\lambda(\tilde{\omega}, t)$ با استفاده از رابطه (۴) به صورت زیر حاصل می‌شود:

$$\lambda(\tilde{\omega}, t) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{2} G(\zeta, \tilde{\omega}) Q(\zeta) q_r(t) d\zeta \quad (5)$$

اکنون در آستانه آخرین مرحله طراحی کنترل کننده قرار داریم. کافی است ابتدا مطابق قضیه ۳ تابع $\delta_2(\tilde{\omega}, t)$ را محاسبه کنیم:

$$\delta_2(\tilde{\omega}, t) = \begin{bmatrix} \frac{\partial \lambda}{\partial \tilde{\omega}} & -I \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} g(\tilde{\omega}) \\ 0 \end{bmatrix} = \frac{\partial \lambda}{\partial \tilde{\omega}} \cdot g(\tilde{\omega}) \quad (6)$$

$$= \left(\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{2} \frac{\partial Q(\zeta, \tilde{\omega})}{\partial \tilde{\omega}} Q(\zeta) q_r(t) d\zeta \right) g(\tilde{\omega})$$

و آنگاه با استفاده از رابطه (۴) قانون کنترل را به دست آوریم.

$$\hat{u} = -\frac{1}{2} g^T(\tilde{\omega}) V_{\tilde{\omega}}^T + \delta_2^T(\tilde{\omega}, t) (\tilde{q} - \lambda(\tilde{\omega}, t))$$

و در نهایت قانون کنترلی مطلوب ما یعنی $k(\omega, q)$ به صورت زیر حاصل می‌شود:

$$k(\omega, q) = \tilde{u} + u_r$$

$$= u_r - g^{-1}(\omega) f_r(\omega_r, \tilde{\omega}) - \frac{1}{2} g^T(\tilde{\omega}) V_{\tilde{\omega}}^T + \delta_2^T(\tilde{\omega}, t) (\tilde{q} - \lambda(\tilde{\omega}, t)) \quad (6)$$

بدین ترتیب کار طراحی کنترل کننده به پایان می‌رسد.

۸- شبیه سازی

در این بخش کارایی کنترل کننده فوق را با چند شبیه سازی نشان خواهیم داد. در کلیه شبیه سازیهای این بخش از مدل جسم صلب غیرخطی ماهواره استفاده شده است که با معادله (۱) بیان می‌شود و فرض براین است که ماهواره باید مانوری را حول بردار دوران یک:

$$-(k_y \tilde{\omega}_y \tilde{\omega}_z + m \tilde{\omega}_z) \frac{\partial G}{\partial \tilde{\omega}_z} - (k_z \tilde{\omega}_z \tilde{\omega}_x + m \tilde{\omega}_x) \frac{\partial G}{\partial \tilde{\omega}_x} \quad (5)$$

$$-(k_z \tilde{\omega}_z \tilde{\omega}_y + m \tilde{\omega}_y) \frac{\partial G}{\partial \tilde{\omega}_y} - \frac{1}{2} G Q(\omega_r, m) = 0$$

$$G(\tilde{\omega}, \tilde{\omega}) = 1$$

که در این معادله:

$$m = p_{11} = p_{22} = p_{33} = -0.5 \quad (5)$$

$$Q(\omega_r, m) = Q(\omega_r) + 6mI$$

اکنون اگر جواب این معادله را به شکل:

$$G(\tilde{\omega}, \zeta) = e^{Q(\omega_r, m) g(\tilde{\omega}, \zeta)} \quad (5)$$

در نظر بگیریم معادله (۵) به صورت زیر ساده می‌شود:

$$-(k_y \tilde{\omega}_y \tilde{\omega}_z + m \tilde{\omega}_z) \frac{\partial g}{\partial \tilde{\omega}_z} - (k_z \tilde{\omega}_z \tilde{\omega}_x + m \tilde{\omega}_x) \frac{\partial g}{\partial \tilde{\omega}_x} \quad (5)$$

$$-(k_z \tilde{\omega}_z \tilde{\omega}_y + m \tilde{\omega}_y) \frac{\partial g}{\partial \tilde{\omega}_y} = 0.5$$

توجه کنید که در معادله فوق اگر p_{ii} ها مقداری بجز -0.5 بودند حل معادله به سادگی امکان پذیر نبود. (برای اطمینان بیشتر از این مطلب می‌توانید معادله دیفرانسیل جزئی فوق را به ازای یک مقدار مخالف -0.5 با برنامه maple یا سایر نرم افزارهای مشابه حل کنید!). اکنون از حل معادله (۵) تابع g به صورت زیر حاصل می‌شود:

$$g(\zeta, \tilde{\omega}) = -\frac{1}{2} \ln \left(\frac{\frac{\zeta_2^2}{k_y} + \frac{\zeta_3^2}{k_z} - 2\frac{\zeta_1^2}{k_x}}{\frac{\tilde{\omega}_y^2}{k_y} + \frac{\tilde{\omega}_z^2}{k_z} - 2\frac{\tilde{\omega}_x^2}{k_x}} \right) \quad (5)$$

و در نتیجه جواب معادله (۵) عبارت است از:

$$G(\zeta, \tilde{\omega}) = \exp \left[-\frac{1}{2} Q(\omega_r, m) \cdot \ln \left(\frac{\frac{\zeta_2^2}{k_y} + \frac{\zeta_3^2}{k_z} - 2\frac{\zeta_1^2}{k_x}}{\frac{\tilde{\omega}_y^2}{k_y} + \frac{\tilde{\omega}_z^2}{k_z} - 2\frac{\tilde{\omega}_x^2}{k_x}} \right) \right] \quad (5)$$

که اگر این عبارت را محاسبه کنیم:

$$\alpha_{\zeta, \tilde{\omega}} = E^{-1} \begin{bmatrix} \cos \frac{1}{2} R \ln E & -\frac{\omega_r}{R} \sin \frac{1}{2} R \ln E & \frac{\omega_r}{R} \sin \frac{1}{2} R \ln E & -\frac{\omega_r}{R} \sin \frac{1}{2} R \ln E \\ \frac{\omega_r}{R} \sin \frac{1}{2} R \ln E & \cos \frac{1}{2} R \ln E & -\frac{\omega_r}{R} \sin \frac{1}{2} R \ln E & -\frac{\omega_r}{R} \sin \frac{1}{2} R \ln E \\ -\frac{\omega_r}{R} \sin \frac{1}{2} R \ln E & \frac{\omega_r}{R} \sin \frac{1}{2} R \ln E & \cos \frac{1}{2} R \ln E & \frac{\omega_r}{R} \sin \frac{1}{2} R \ln E \\ \frac{\omega_r}{R} \sin \frac{1}{2} R \ln E & -\frac{\omega_r}{R} \sin \frac{1}{2} R \ln E & -\frac{\omega_r}{R} \sin \frac{1}{2} R \ln E & \cos \frac{1}{2} R \ln E \end{bmatrix}$$

در شبیه‌سازی انجام شده در این فصل شرایط اولیه برای کواترین‌ها به صورت:

$$q_0 = [0 \ 0 \ 0 \ 1]$$

در نظر گرفته شده است و پس از پایان مانور، کواترین‌ها باید دارای مقادیر زیر باشند:

$$q_f = [0 \ 0 \ 0 \ -1]$$

در ضمن شرایط اولیه برای سرعت‌های زاویه‌ای به صورت زیر است:

$$\omega_0 = [-0.01 \ -0.02 \ 0.03]^T \text{ N.m}$$

در کلیه شبیه‌سازیها اثر اشباع عملگرها در نظر گرفته شده است بدین معنی که عملگرهای هر کانال گشتاوری بین -6 و $+6$ نیوتن - متر تولید می‌کنند. بعلاوه تمامی عملگرها در لحظه آغاز مانور در حال استراحت فرض شده‌اند یعنی:

$$u_0 = [0 \ 0 \ 0] \text{ N.m}$$

ثابت γ نیز در تمامی شبیه‌سازیها برابر ۲ انتخاب شده است.

در اولین مرحله شبیه‌سازی به منظور بررسی کارایی تقریب استفاده شده و بررسی خطاهای ناشی از آن شبیه‌سازی را در غیاب اغتشاشات مؤثر بر عملگرها انجام می‌دهیم. نمودارهای مربوط به این شبیه‌سازی را در شکل‌های ۴ تا ۱ ملاحظه می‌کنید. در شکل ۴ نمودار خطای سرعت‌ها نشان داده شده است. همانطور که مشاهده می‌شود سرعت‌های زاویه‌ای در مدت حدود ۵ ثانیه به مقادیر مرجع رسیده‌اند، خطای سرعت در کانالهای گردش و چرخش صفر شده اما در کانال پیچ که کمترین اینرسی دورانی را نیز دارد کنترل‌کننده در صفر کردن خطا ناتوان بوده و خطای این کانال در سطح 0.2° رادیان بر ثانیه ثابت باقی مانده است. علت این پدیده حساس‌تر بودن این کانال به خطای موجود در فرمانهای گشتاور است که با توجه به کوچکتر بودن مقدار اینرسی دورانی آن قابل توجیه است. گشتاورهای اعمالی در سه کانال در نمودارهای ۵ تا ۷ نشان داده شده است. همانگونه که

$$u_\phi = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \end{bmatrix} \quad (5)$$

مطابق الگوی زیر انجام دهد:

$$\phi(t) = \pi(1 - \cos \pi \frac{t}{T}) \text{ rad} \quad (6)$$

که در این معادله T مدت زمان انجام مانور است و ما در شبیه‌سازیهای خود این مقدار را برابر ۴ ثانیه در نظر خواهیم گرفت.

جدول ۱ پارامترهای فیزیکی ماهواره فرضی را که در شبیه‌سازیها از آنها استفاده شده نشان می‌دهد.

جدول ۱ پارامترهای فیزیکی ماهواره مورد شبیه‌سازی

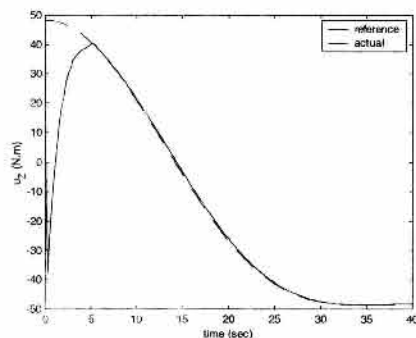
واحد	مقدار	پارامتر
$\text{Kg} \cdot \text{m}^2$	۳۰۰۰	J_x
$\text{Kg} \cdot \text{m}^2$	۱۶۸۰	J_y
$\text{Kg} \cdot \text{m}^2$	۴۳۲۰	J_z

قبل از آنکه به تشریح شبیه‌سازی بپردازیم لازم است مختصری درباره معیار اندازه‌گیری خطا در طراحی‌های واقعی صحبت کنیم. در مسأله کنترل وضعیت معمولاً از مقدار مؤثر خطا به عنوان معیار اندازه‌گیری خطا (و در نتیجه قابل قبول بودن یا نبودن طراحی) استفاده می‌شود. بدین منظور پس از محاسبه کواترین‌ها و تبدیل آنها به زوایای اوپلر، مقدار مؤثر خطا را در هر کانال محاسبه و آن را با مقادیر مجاز و مطلوب خطا - که از قبل مشخص است - مقایسه می‌کنند. در جدول ۲ مقدار مؤثر خطای قابل قبول برای دو نمونه از ماهواره‌های واقعی آورده شده است:

جدول ۲ مقادیر مؤثر خطای قابل قبول برای دو نمونه ماهواره

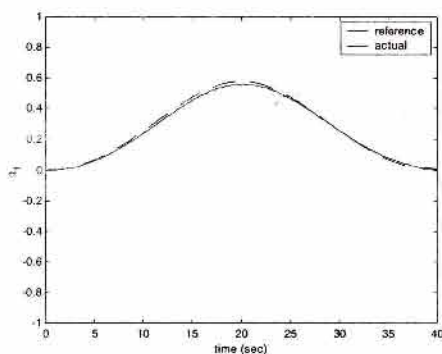
نام ماهواره	خطا در کانال واقعی		
	چرخش (mrad)	پیچش (mrad)	خطا در کانال گردش (mrad)
Orsted	۷	۵	۵
Cassini	۳	۳	۳

مشاهده می‌شود ورودیها در مدت ۵ ثانیه خود را به مقادیر مرجع رسانده‌اند و در باقی زمان مانور از فرمانهای مرجع تبعیت کرده‌اند. در شکلهای ۸ تا ۱۰ کواترین‌ها ترسیم شده است. آثار ناشی از صفر نشدن خطای سرعت را در این نمودارها به خصوص در q_2 می‌توان مشاهده کرد. این در حالی است که در q_1 و q_3 این آثار بسیار کم و در q_4 تقریباً صفر است. مقدار مؤثر خطای جهت‌گیری برای سه کانال عبارت است از:

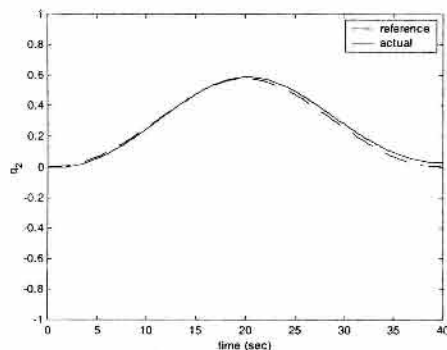


شکل ۷

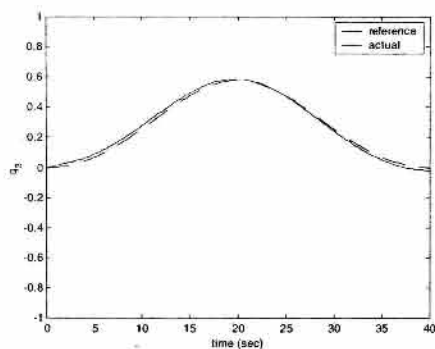
شکلهای ۵ تا ۷ گشتاورهای اعمالی



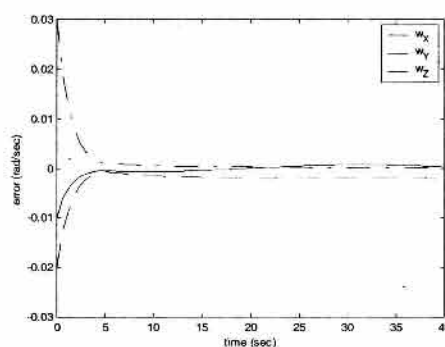
شکل ۸



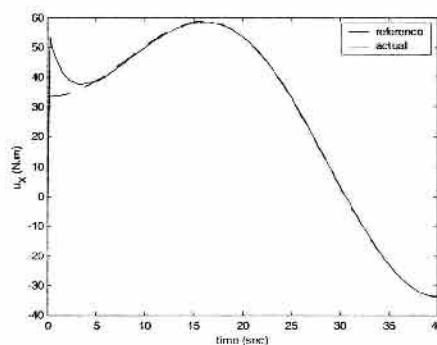
شکل ۹



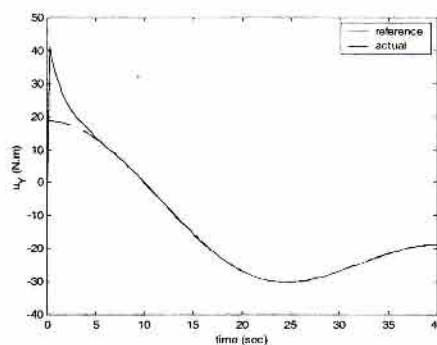
شکل ۱۰



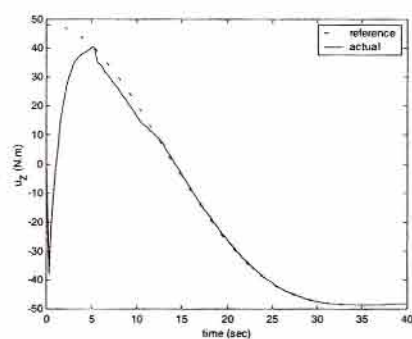
شکل ۴ نمودار خطای سرعت های زاویه ای



شکل ۵

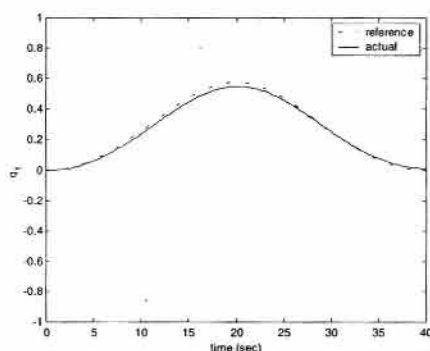


شکل ۶

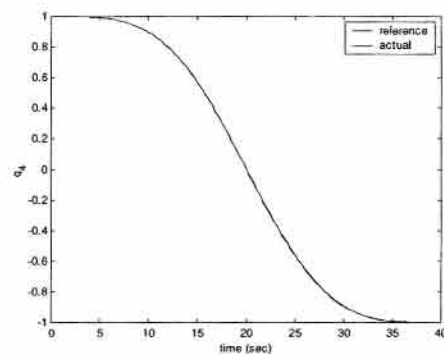


شکل ۱۰

شکلهای ۱۳ تا ۱۵ گشتاورهای اعمالی در حضور اغتشاش پالسی

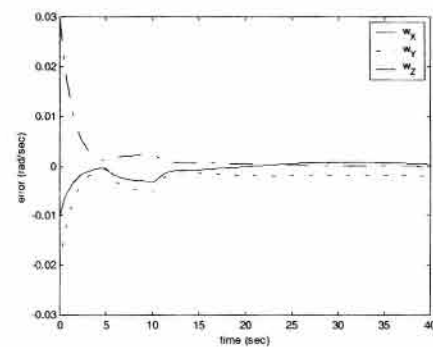


شکل ۱۱

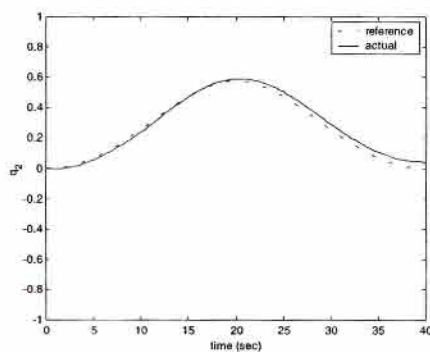


شکل ۱۲

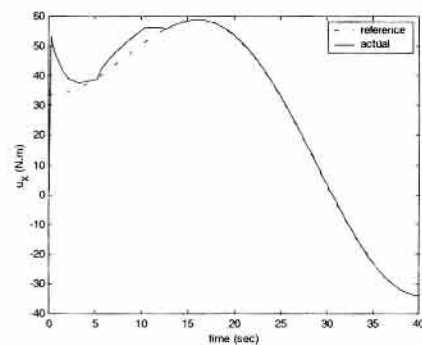
شکلهای ۸ تا ۱۱ کوآترینها



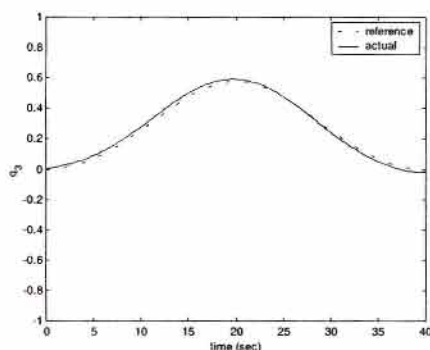
شکل ۱۲ نمودار خطای سرعت های زاویه ای در حضور اغتشاش پالسی



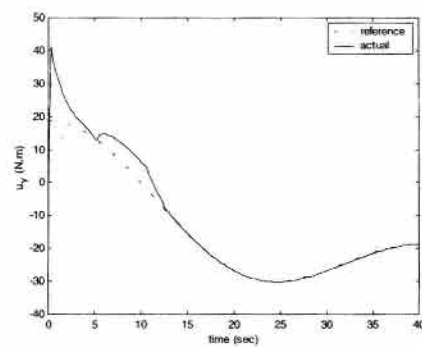
شکل ۱۴



شکل ۱۵



شکل ۱۶



شکل ۱۷

کمترین اینرسی دورانی را نیز دارد، کنترل‌کننده از صفرکردن خطا ناتوان بوده و خطا در این کانال در سطح ± 0.4 رادیان بر ثانیه ثابت مانده است. سیستم بخوبی توانسته اثر اغتشاشات را برطرف نماید. سیگنالهای کنترل نیز ۲ ثانیه بعد از اتمام اغتشاش بار دیگر با مقادیر مرجع هماهنگ می‌شوند. در اینجا q_2 بیشترین تأثیر را از صفر نشدن خطای سرعت زاویه‌ای در کانال چرخش پذیرفته و q_1 ، q_3 و q_4 کمتر دچار انحراف شده‌اند. مقادیر مؤثر

خطای جهت‌گیری در این شبیه‌سازی برابر است با:

$$RMSE(\theta) = [48.60 \ 49.58 \ 45.08] \text{ mrad}$$

که کاملاً قابل قبول است. همچنین اگر خطا را برحسب خود کوادرین‌ها بیان کنیم:

$$RMSE(q) = [0.0174 \ 0.0250 \ 0.0180 \ 0.0067]$$

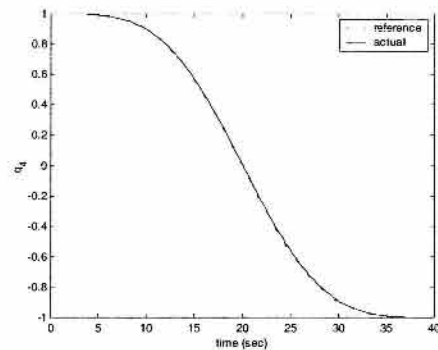
در آخرین شبیه‌سازی، رفتار سیستم را در هنگام بروز اغتشاش سینوسی دائمی به آن بررسی کرده ایم. بدین منظور فرض کنید اغتشاش زیر در تمامی زمان مانور بر عملگرها اثر کند:

$$d_4(t) = \begin{bmatrix} -1.5 \\ -1.5 \\ +1.5 \end{bmatrix} \cdot \sin\left(\frac{\pi t}{10}\right) \text{ N.m}$$

رفتار سیستم در قبال این اغتشاش در شکل‌های ۲ تا ۴ ترسیم شده است. مشاهده می‌شود که سیستم بخوبی از عهده بر طرف کردن اثر اغتشاش برآمده و پاسخهای سیستم تقریباً مشابه حالتی است که اغتشاش وجود ندارد. البته در این حالت به علت وجود اغتشاش دائمی، هیچیک از خطاها دقیقاً صفر نمی‌شوند و مقادیری بسیار نزدیک به صفر دارند (بترتیب -0.8 ، -0.4 ، 0.4 و 0.8). آثار اغتشاش سینوسی بر سیگنال‌های کنترلی نیز در شکل‌های ۲ الی ۴ ملاحظه می‌شود. همانطور که در این شکلها آمده کنترل‌کننده، ضمن اینکه فرمانهای مرجع را دنبال می‌کند مقداری نیز حول آن نوسان می‌کند. مقادیر مؤثر خطای جهت‌گیری عبارتند از:

$$RMSE(\theta) = [45.34 \ 31.48 \ 29.07] \text{ mrad}$$

$$RMSE(q) = [0.0147 \ 0.0175 \ 0.0185 \ 0.0023]$$



شکل ۱۹

شکل‌های ۱۶ تا ۱۹ کوادرین‌ها در حضور اغتشاش پالسی

$$RMSE(\theta) = [38.60 \ 34.84 \ 28.19] \text{ mrad}$$

اگر بخواهیم این خطا را به جای زوایای اوایلر بر حسب

خود کوادرین‌ها بیان کنیم این مقادیر به دست می‌آید:

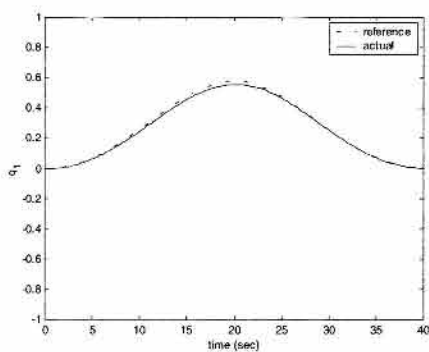
$$RMSE(q) = [0.0132 \ 0.0178 \ 0.0157 \ 0.0036]$$

در ادامه و به منظور بررسی عملکرد سیستم و کنترل‌کننده در حضور اغتشاش اثر اغتشاشات خارجی از جنس گشتاور را بر عملکرد سیستم بررسی می‌کنیم. بدین منظور شبیه‌سازی را با اعمال اغتشاش پالسی یا سینوسی تکرار می‌کنیم.

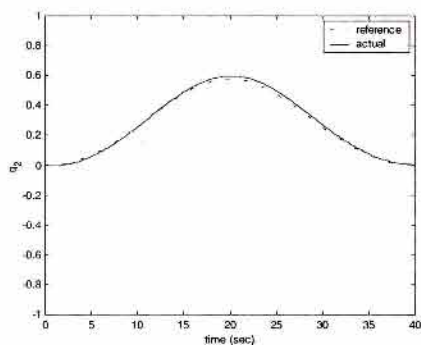
ابتدا عملکرد سیستم را در مقابل وارد شدن اغتشاش پالسی بررسی می‌کنیم. فرض کنید اغتشاش پالسی به صورت زیر:

$$d(t) = \begin{bmatrix} -6 \\ -6 \\ +6 \end{bmatrix} \cdot (s(t-5) - s(t-10)) \text{ N.m}$$

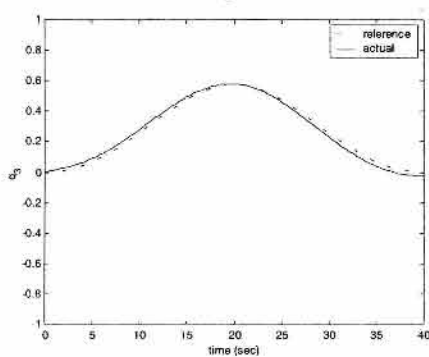
(که در آن $s(t)$ تابع پله واحد است) به سیستم وارد شود. سعی کرده‌ایم اغتشاش را در بدترین زمان ممکن یعنی در همان لحظاتی که سیستم به تازگی با مقادیر مرجع هماهنگی و تطابق یافته به سیستم اعمال کنیم. نتایج شبیه‌سازی را در شکل‌های ۲ الی ۹ مشاهده می‌کنید. همانطور که از این شکلها برمی‌آید سرعت‌های زاویه‌ای کمی پس از رفع اثر اغتشاش به مقادیر مرجع رسیده و در باقی زمانها از فرمانهای مرجع تبعیت کرده‌اند. همچنین نمودار ۲ نشان می‌دهد که خطای سرعت در کانالهای گردش و چرخش صفر شده اما در کانال پیچش که



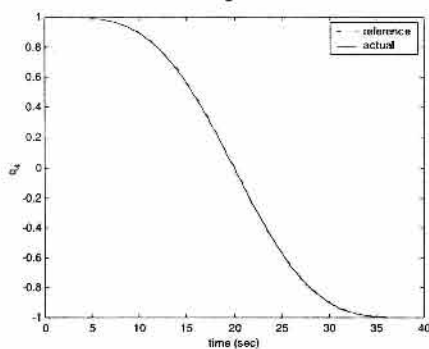
شکل ۲۴



شکل ۲۵

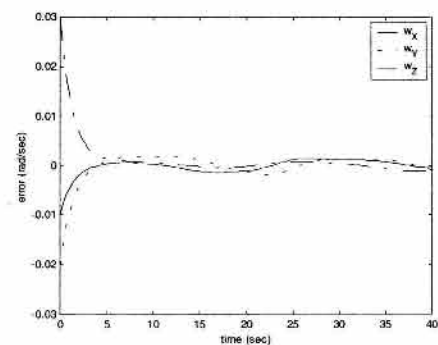


شکل ۲۶



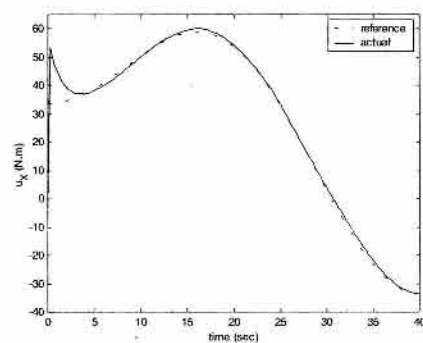
شکل ۲۷

شکلهای ۲۴ تا ۲۷ کواترینین‌ها در حضور اغتشاش سینوسی دائمی

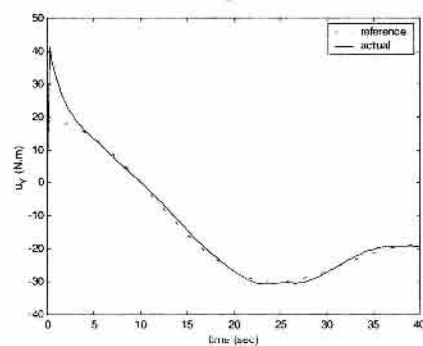


شکل ۲۰ نمودار خطای سرعت های زاویه ای در حضور اغتشاش

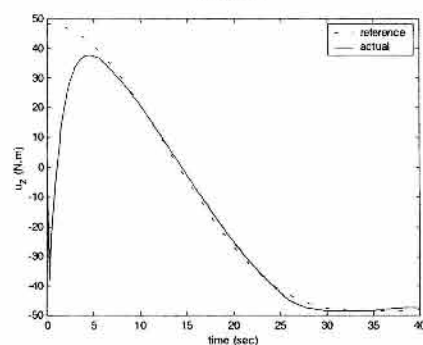
سینوسی دائمی



شکل ۲۱



شکل ۲۲



شکل ۲۳

شکلهای ۲۱ تا ۲۳ گشتاورهای اعمالی در حضور اغتشاش

سینوسی دائمی

۹- نتیجه گیری

همانگونه که در مقدمه ذکر شد، هدف این مقاله به دست آوردن کنترل کننده ای است که امکان کنترل وضعیت ماهواره را در هنگام انجام مانورهای کوچک یا بزرگ فراهم سازد. این اصلی ترین مزیت کنترل کننده H_∞ غیرخطی طراحی شده است با ملاحظه نتایج به دست آمده در طی شبیه سازیهای فوق و مقایسه آنها با نتایج اکثر مراجع ذکر شده در مقدمه می توان اینطور نتیجه گرفت که کنترل کننده پیشنهادی در این مقاله علی رغم ساختار پیچیده آن، ناحیه جذب^۱ بزرگی را برای سیستم حلقه بسته ایجاد می کند، به طوری که قادر است یک مانور دورانی کامل ۳۶۰ درجه ای را در مدت زمان محدود مد نظر ما انجام دهد. این در حالی است که کلیه عملگرها ضمن عکس العمل سریع در برابر اغتشاشات وارد شده به سیستم هرگز از ناحیه کار مجاز خود خارج نشده اند. شبیه سازیهای بیشتر این نکته را نشان داده که حتی در هنگام اشباع شدن عملگرها، سیستم همچنان به نحو قابل قبولی اثر اغتشاشات وارده را جبران می کند [۷]. با در نظر گرفتن این نکته که در طی مراحل به دست آوردن کنترل کننده از دو تقریب ساده کننده استفاده کرده ایم طبیعی است که احتمال تعقیب کامل فرمانهای مرجع کاهش خواهد یافت اما می توان امیدوار بود که جوابهای حاصل در همسایگی فرمانهای مرجع قرار گیرند. با در نظر گرفتن این نکته نتایج حاصل از شبیه سازیهای انجام شده، مؤید عملکرد رضایتبخش کنترل کننده در دو کانال گردش و چرخش است و در این دو کانال تعقیب، فرمانهای مرجع تقریباً به صورت کامل انجام می شود. اما در کانال پیچش که - کمترین اینرسی دورانی را دارد - مقداری خطای ثابت در سرعت زاویه ای مشاهده می شود که این خطا به علت وجود کوپلاژ (تزویدج) شدید در معادله دیفرانسیل کواترنین ها به نوبه خود موجب بروز خطا در جهت گیری

ماهواره در هر سه کانال می شود. با توجه به معیارهای ذکر شده در جدول ۲ مقدار این خطاها عمدتاً در حد قابل قبول بوده و مؤید پایداری دینامیک تند حذف شده و قابل قبول بودن عمل ساده سازی مدل است.

۱۰- منابع

- [1] Yung Wen, J.T. ; Kreutz Delgado, K.; "The Attitude Control Problem"; IEEE Trans. Automatic Control, Vol.36, No. 10, October 1992; pp. 1148-1162.
- [2] Le Ballois, S. and Duc G. " H_∞ Control of a Sattelite Platform: Coprime Factors Design Versus Multi-Block Approach"; 2nd IEEE Conference on Control Applications, Vancouver, B.C., Canada; 1993; pp. 997-982.
- [3] Wang, P., Shtessel, Y.B; Wang, Y.Q.; "Sattelite Attitude Control Using Only Magnetorquers"; Proceedings of American Control Conference, Philadelphia, June 1998; pp. 222-226.
- [4] Joshi, S.M.; Kelkar, A.G.; Wen, T.Y.; "Robust Attitude Stabilization of Spacecraft Using Nonlinear Quaternion Feedback". IEEE Trans. Automatic Control; Vol. 40, No. 10, October 1995; pp. 1800-1803.
- [5] Cavallo, A.; De Maria, G.; "Attitude Control for Large Angle Maneuvers"; IEEE Workshop on Variable Structure Systems; Tokyo, Japan, 1996; pp. 232-237
- [6] McFarlane, D.; Glover, K.; Noton, M.; "Robust Stabilization of Flexible Space Platform: An H_∞ Coprime Factor Approach"; in Proceedings of Control 88, IEE Conference, Oxford UK(1998).
- [7] Di Gennaro, S.; "Output Attitude Control of FlexibleSpacecraft from Quaternion Measures: A Passivity Approach"; Proceedings of 37th IEEE Conference on

1. Domain of Attraction

- [10] Isidori, A.; Tarn, T.J.; "Robust Regulation for Nonlinear Systems with Gain-bounded Uncertainties"; IEEE Trans. On Automatic Control; Vol. 40, No. 10; October 1995; pp. 1744-1754.
- [11] Ockendon, J.R.; Howison, S.D.; Lacey, A.A.; Movchan, A.B.; "Applied Partial Differential Equations"; Oxford University Press; 1999.
- [۲] اهوزی علی؛ "طراحی کنترل کننده H_∞ غیرخطی برای سیستمهای غیرخطی آشفته تکیه"; پایان نامه کارشناسی ارشد دانشگاه تربیت مدرس، تابستان
- Decision and Control, Tampa, Florida, December 1998; pp. 4549-4550.
- [8] Seetharma Bhat, M.; Sreenatha, A.G.; Shrivastava, S.K.; "Robust Low Order Dynamic Controller for Flexible Spacecraft". IEEE Proceedings-D; Vol. 138, No. 5; September 1991; pp. 460-468.
- [9] Bak, T.; Wisniewski, R; Blanke, M.; "Autonomous Attitude Determination and Control System for the Orsted Sattelite"; Proceeding Aerospace Application Conference, Aspen, Colorado, 1998; pp. 173-186.

